

SÉRIE A.

56

N° d'ORDRE: 64

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

Georges de BOTHEZAT,

INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN, INGÉNIEUR TECHNOLOGUE.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

2^e THÈSE. — RECHERCHES SUR LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ DANS SES
RAPPORTS AVEC LA MÉCANIQUE.

Soutenues le *13* juin 1911, devant la Commission d'Examen.

MM. PAUL APPELL, *Président.*
PAUL PAINLEVÉ, } *Examineurs.*
C. GUICHARD, }

PARIS,

H. DUNOD ET E. PINAT, ÉDITEURS,

47 et 49, Quai des Grands-Augustins.

—
1911

ÉTUDE
DE LA
STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

SÉRIE A.

56

N° d'ORDRE : 64

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

Georges de BOTHEZAT,

INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN, INGÉNIEUR TECHNOLOGUE.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

2^e THÈSE. — RECHERCHES SUR LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ DANS SES
RAPPORTS AVEC LA MÉCANIQUE.

Soutenues le 13 juin 1911, devant la Commission d'Examen.

MM. PAUL APPELL, *Président.*
PAUL PAINLEVÉ, } *Examineurs.*
C. GUICHARD, }



PARIS,

H. DUNOD ET E. PINAT, ÉDITEURS,

47 et 49, Quai des Grands-Augustins.

1911

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen	P. APPELL, Professeur ..	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires.	L. TROOST.	
	Ch. WOLF.	
	J. RIBAN.	
Professeurs	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Y. DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. compar.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KÖNIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
	GOUSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER.....	Chimie.
	Gabriel BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zool. (Évolution des êtres organisés).
	G. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	Jean PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
Professeurs adjoints ...	N.....	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	Léon BERTRAND.....	Géologie.
	Rémy PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON.....	Physique.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

Hommage affectueux

à

Monsieur Georges de Ryschkanes-Déréjinsky

comme expression de ma plus profonde
reconnaissance pour les si puissants et
sincères encouragements qu'il m'a toujours
témoignés dans mon travail.

Ama mère



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552803_0071

AVANT-PROPOS.

Le problème de la stabilité, relativement simple pour les véhicules roulants est déjà beaucoup plus complexe pour les navires, mais c'est surtout en ce qui concerne les aéroplanes que ce problème devient délicat à traiter. Cette question de la stabilité a été sans contredit une des plus grandes difficultés que les pionniers de l'aviation ont rencontrées. Quand les théoréticiens tels que Cayley et Penaud eurent conçus l'aéroplane et que leurs travaux eurent établis la disposition générale de cet appareil, la réalisation pratique de l'aéroplane présentait encore de grandes difficultés. D'un côté, il fallait encore réaliser le moteur léger, d'un autre côté l'essai et la mise au point d'un aéroplane exigeait un vrai héroïsme expérimental. Quand Lilienthal eut élucidé les propriétés fondamentales des surfaces sustentatrices par une remarquable série de chutes planées; quand Levassieur en France et les frères Wright en Amérique eurent indépendamment réalisé le moteur léger, ce n'est qu'après une longue série de téméraires efforts que les Wright, Ferber, Santos-Dumont, Voisin, Farman, Blériot parvinrent à réaliser les premiers appareils présentant une stabilité relative et à réussir ainsi les premiers vols du planeur propulsé. Ces expérimentateurs ont fait ressortir empiriquement et d'une manière seulement qualitative quelques-unes des propriétés fondamentales de l'aéroplane au point de vue de sa stabilité. C'est ainsi qu'on s'est rendu compte que la stabilité longitudinale était la plus délicate et que le gouvernail horizontal était un puissant moyen de l'assurer, mais que son maniement exigeait un grand exercice et une grande habileté. C'est ainsi qu'a été reconnu le rôle si important de la

queue pour la stabilité longitudinale, qui doit être moins cabrée que la voilure principale de l'appareil pour que son action soit efficace. La mise au point de ce dernier et si important perfectionnement est tout à l'honneur des constructeurs français qui seuls sont arrivés à se servir de ce dispositif avec succès. C'est ainsi qu'on se rendit compte que le gouvernail vertical pouvait aussi servir à maintenir la stabilité latérale, etc. Muni de ces premières données on se lança dans la construction des appareils. L'enthousiasme provoqué par les premiers vols créa de suite une assez grande classe d'amateurs et de fervents de l'aviation et, l'industrie à peine naissante de l'aéroplane vit s'ouvrir devant elle d'assez grands débouchés. Mais si à l'heure actuelle le plus expérimenté des constructeurs d'aéroplanes se demandait en toute conscience : Quelle est la part de connaissances conscientes qu'il introduit dans la construction de ses appareils ; quelles sont vraiment ses connaissances des propriétés de stabilité de l'aéroplane ? Il devra sans doute se répondre, qu'effectivement il ne sait pas grand'chose. Que les règles de construction qu'il possède et qu'il a réussi à dégager sont assez disparates entre elles et qu'il ne connaît qu'assez vaguement les propriétés des dispositifs qu'il emploie. Que chaque fois que guidé par telles ou telles autres idées ou exigences, il veut apporter certaines modifications à son appareil, c'est avec la plus grande circonspection qu'il agit et avec les plus grands tâtonnements. Il ressemble encore à un être mi-aveugle qui cherche à se frayer un chemin à travers une lumière diffuse. Le constructeur reconnaîtra bien, que chaque fois qu'il cherche à perfectionner son appareil, presque instinctivement il est envahi par un certain sentiment de crainte, la crainte de voir tout d'un coup s'évanouir, par la modification qu'il essaie, les propriétés de stabilité relative de son appareil et qu'il est arrivé à établir avec tant d'effort. Nous devons reconnaître qu'on ne possède pas encore suffisamment, pour les manier avec assurance, les propriétés de stabilité de l'aéroplane. On sait à peu près de quels facteurs dépend cette stabilité, mais

on n'en est pas toujours bien sûr. L'opinion suivante est le plus généralement admise : c'est parce que les lois de la résistance de l'air ne nous sont pas encore connues avec toute la précision désirable, qu'on arrive pas à se rendre compte avec plus de certitude des propriétés de stabilité de l'aéroplane. Il n'en est pas tout à fait ainsi, et cette opinion a cela de fâcheux quelle arrête pour ainsi dire les investigations de la question. Que ceux qui sont fermement convaincus que c'est seulement par l'étude des lois de la résistance de l'air qu'on peut arriver à élucider le problème de la stabilité de l'aéroplane, veuillent bien, pour un instant, s'imaginer que les lois de la résistance de l'air leur sont données avec toute l'ampleur et la rigueur désirable et qu'il ne leur reste plus qu'à les appliquer. Ils verront alors qu'ils seront bien embarrassés de s'en servir pour construire des aéroplanes plus stables que ne le sont les aéroplanes actuels et ils seront même peut-être plus embarrassés que maintenant puisqu'ils n'auront plus leur vieux motif de consolation.

Ce n'est pourtant pas d'hier que date l'idée que pour élucider les propriétés de stabilité de l'aéroplane, il ne suffit pas de connaître les lois de la résistance de l'air, mais qu'il faut encore établir certaines propriétés purement dynamiques de l'aéroplane, et que ce côté dynamique de la question est loin encore d'en être le plus facile. Les premiers essais de l'étude de la stabilité de l'aéroplane remontent à peu près à l'époque où les frères Wright réussirent leur premier vol stable d'un planeur propulsé. C'est en effet en juin 1903 que MM. Bryan et Williams ⁽¹⁾ firent connaître leurs investigations sur la question. MM. Bryan et Williams posent nettement le problème et c'est l'Ouvrage classique de M. J. Routh ⁽¹⁾ qui sert de base à leur travail. Ce sont les petits mouvements de l'appareil qu'il s'agit d'étudier et qui seuls peuvent nous renseigner sur la stabilité de l'aéroplane. Viennent ensuite les études de la

(1) Les travaux de ces auteurs, ici sous-entendus, sont cités en Note ⁽¹⁾, p. 117.

stabilité de l'aéroplane de MM. F. Ferber ⁽¹⁾ et R. Soreau ⁽²⁾. M. F. Ferber est le premier qui ne se limite pas à la stabilité longitudinale mais envisage le problème général de la stabilité.

Enfin c'est M. Paul Painlevé qui aborde la question et qui le premier a fourni le système d'équation complet et explicite des petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime normal, système contenant tous les éléments essentiels de la question et où chaque facteur était étudié et analysé. Que manquait-il chez les prédécesseurs de M. Paul Painlevé pour que le problème de la stabilité de l'aéroplane puisse être abordé dans toute sa généralité? Il fallait d'abord élucider une quantité innombrable de faits qui, en s'entremêlant, entouraient encore la question d'un certain chaos. C'est ainsi qu'on ne se rendait pas bien compte du double rôle de la queue des aéroplanes. Rôle stabilisateur d'abord que M. Paul Painlevé a mis en évidence par le concept de couple central, rôle amortisseur ensuite dont M. Paul Painlevé a indiqué toute l'importance ⁽³⁾. C'est ainsi qu'on ne se rendait pas bien compte de quels autres facteurs pouvait encore dépendre la stabilité de l'aéroplane, et M. Paul Painlevé a indiqué la décentration des hélices. Il fallait ensuite définir tout le système de concepts sur lesquels repose le problème, chose qui avait été négligé jusqu'ici, afin d'assurer des bases sûres à la question. Il fallait enfin estimer à leur juste valeur les divers éléments introduits dans la question et bien mettre en relief ce que en fin de compte on devait chercher dans la solution du problème et ce qu'on devait en attendre. Telle est dans ses grands traits la grande œuvre critique de M. Paul Painlevé. Je puis dire que cette étude est presque entièrement consacrée à l'étude du système d'équations posé par M. Paul Painlevé.

(¹) Voir Note (¹), p. 179 de la présente Étude.

(²) R. SOREAU. *Etat actuel et avenir de l'aviation*. (Extrait des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France*, Bulletin de juillet 1908.)

(³) Ces travaux de M. Paul Painlevé sur la queue des aéroplanes se rattachent à ceux de M. G. Crocco sur les empennages des dirigeables.

A toutes les conclusions tirées de l'étude théorique du problème de la stabilité de l'aéroplane on a toujours reproché de reposer sur des bases parfois incertaines, comme le sont encore actuellement les lois de la résistance de l'air et que, par conséquent, ces conclusions pourraient être fortement modifiées par de nouveaux progrès de l'aérodynamique. J'ai tenu à mettre cette étude à l'abri de telles atteintes. La question la plus douteuse dans les lois de la résistance de l'air, c'est le sens du déplacement du centre de pression. Il sera montré dans cette étude que le système d'équations relatif aux petits mouvements de l'aéroplane est tout à fait indépendant de ce fait et qu'en général, quels que soient les progrès futurs faits dans la connaissance des lois de la résistance de l'air, notre système sera toujours, dans une première approximation, l'expression exacte du problème. Les progrès expérimentaux de l'aérodynamique nous feront seulement connaître avec plus de précision les divers coefficients qui figurent dans nos équations, mais ils ne changeront ni la forme ni la constitution générale de ces équations. On conçoit ainsi tout l'intérêt que présente l'étude de ce système d'équations et la valeur des conclusions qui peuvent en être tirées. Je sais que la plus éloquente plaidoirie n'arrivera pas à convaincre les adversaires des opinions que j'ai développées jusqu'ici; c'est pourquoi je ne m'y arrête pas davantage. Je les inviterai simplement à parcourir cet Ouvrage, et je me permets de croire que les résultats ici acquis sont les meilleurs arguments pour justifier l'exactitude du point de vue auquel on s'est placé et de la méthode qui a été suivie. Je veux seulement encore caractériser aussi brièvement que possible le programme général de cette étude.

Les premières pages sont consacrées à quelques préliminaires qui ont pour but de préciser et de définir les principales notions dont nous aurons à faire usage et de donner un aperçu des principales formules aérodynamiques que nous aurons à employer. Ensuite est abordée l'étude des empennages horizontaux tels que la queue par exemple et cette étude est, je me permets de le croire, la

plus complète qui a été faite jusqu'à ce jour. Cette étude des empennages des avions généralement négligée a été inaugurée par M. Paul Painlevé. Elle est de la plus haute importance, car elle nous permet d'élucider complètement un des plus importants facteurs, le couple central, qui intervient dans l'étude du mouvement de l'avion et y joue un rôle fondamental. La première Partie de cette étude est ainsi consacrée à l'étude des éléments du problème qui dépendent spécialement des lois de la résistance de l'air.

C'est la deuxième Partie qui est proprement parlant consacrée à l'étude de la stabilité de l'avion. Elle débute par un examen de la notion de stabilité de l'avion. Nous recherchons quels doivent être les critères exactes d'une stabilité pratiquement parfaitement assurée de l'avion et l'on trouvera énoncées ici pour la première fois les conditions *nécessaires et suffisantes* de stabilité de l'avion. Nous examinons les diverses allures suivant lesquelles peuvent s'amortir les oscillations d'un avion et nous indiquons la base de leur comparaison. Nous indiquons aussi la possibilité de caractériser par un nombre le degré de stabilité de l'avion. Nous passons ensuite à l'étude de stabilité longitudinale. Dans cette étude ce sont plutôt les difficultés algébriques qui se rencontrent. L'équation caractéristique du quatrième degré, à laquelle on est amené, a ses coefficients de telles dimensions que sa discussion par les méthodes généralement employées est complètement impraticable. Ce qui augmente encore la difficulté de la question c'est qu'il est nécessaire d'être renseigné non seulement sur les signes des racines de l'équation caractéristique, mais qu'il est encore indispensable de pouvoir en suivre toutes les variations en grandeur quand varient tous les facteurs de la question. Il ne faut pas songer à négliger dans l'équation caractéristique pour la simplifier et ainsi faciliter sa discussion les termes qui, en comparaison avec d'autres, pourront paraître petits, car alors, comme le montre les premiers essais, toute discussion quantitative disparaît du problème. Après avoir essayé toute une série de méthodes, je me suis

arrêté à celles qui suivent et qui ont permis d'arriver à une discussion complète du problème. Pour l'étude des racines réelles de l'équation caractéristique j'ai eu recours à une méthode de M. Félix Klein sur l'interprétation géométrique des équations algébriques, méthode qui présente entre autres le grand avantage de conduire à des procédés graphiques très pratiques, qui permettent de calculer fort aisément les dimensions de l'aéroplane les plus favorables à sa stabilité. Pour l'étude des racines complexes de l'équation caractéristique j'ai adapté la méthode des indices de Cauchy de manière à pouvoir, non seulement déterminer comme on le fait généralement, le nombre de zéros d'une fonction contenus dans un contour, mais de pouvoir encore suivre la variation des parties réelles des racines complexes en fonction des divers éléments de notre problème. Je me permets de croire que la marche que j'ai suivie pour la discussion de l'équation caractéristique pourra rendre service dans bien des cas où se présentent des équations algébriques de degré élevé et que la grandeur des coefficients rend pénibles à discuter. Nous arrivons à une solution complète du problème de la stabilité longitudinale de l'aéroplane qui est étudiée non seulement pour le régime horizontal mais aussi pour tous les régimes de montée et de descente par vent régulier ainsi que pour la descente planée. Nous établissons l'influence de toutes les parties constitutives de l'aéroplane sur sa stabilité et indiquons la manière de calculer les dimensions des empennages d'un aéroplane les plus favorables à sa stabilité. On verra entre autres que l'aéroplane lent peut être rendu tout aussi stable que l'aéroplane rapide et que par conséquent la vitesse de régime de l'aéroplane n'a nullement l'action si favorable sur la stabilité qu'on lui a souvent erronément attribuée. L'influence de la décentration des hélices sur la stabilité est aussi soumise à une discussion complète et nous sommes ainsi amenés à tracer un parallèle entre les appareils français à empennages horizontaux et les appareils Wright, parallèle qui est tout à l'avantage des appareils français. J'établis ensuite le système général d'équa-

tions relatifs aux petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime normal. Ce système d'équations présente ceci de particulier qu'il se divise en deux groupes indépendants, l'un relatif uniquement au tangage de l'appareil, l'autre au roulis et à la giration qui sont par contre intimement liés. Ainsi se trouve justifiée l'étude séparée de la stabilité longitudinale de l'aéroplane de sa stabilité latérale.

Parmi les résultats acquis par cette étude l'un des principaux et quelque peu inattendu est que l'aéroplane ne peut pas être rendu parfaitement stable de la même manière que les véhicules roulants et les navires, rien que par sa disposition générale et ses formes extérieures tant qu'il constitue un système invariable. La réalisation de l'aéroplane parfaitement stable est un problème plus complexe qui ne peut être résolu que par des dispositifs d'un caractère essentiellement mobile ⁽¹⁾.

Je tiens à exprimer ici même toute ma reconnaissance à M. Paul Painlevé pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ce travail.

Georges DE BOTHEZAT.

Paris, Janvier 1911.

(¹) Je me permet d'indiquer, pour faciliter la tâche de la critique, que nos contributions personnelles à la question de la stabilité de l'aéroplane sont principalement reléguées dans les paragraphes suivants ;

Première Partie : Chapitre III, §§ 29 à 43; Chapitre IV, §§ 44 à 47.

Deuxième Partie : Chapitre I, §§ 48, 51 à 66; Chapitre II, §§ 67 à 72.

Conclusions générales, §§ 73 à 75.



APERÇU GÉNÉRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

LES FORCES AGISSANTES SUR L'AÉROPLANE.

CHAPITRE I.

QUELQUES DÉFINITIONS ET QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX LOIS DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

	Pages.
1. INTRODUCTION	17

I. — Quelques considérations générales sur le mouvement d'un solide dans un fluide.

2. Mouvement d'un solide dans un fluide au voisinage de la terre. Résistance du fluide.	18
3. Le régime dans le mouvement de translation rectiligne et uniforme. Le principe de relativité de l'hydrodynamique.	19
4. Notion de loi de la résistance d'un fluide. Portée exacte du concept torseur résultant de la résistance du fluide.	20
5. Cas particulier où la résistance du fluide se réduit à une résultante unique. Le sens de la trainée	21
6. Le régime dans le mouvement de rotation uniforme et le mouvement hélicoïdal	23
7. Difficulté de l'étude théorique des lois de la résistance de l'air. Les phénomènes réversibles et irréversibles. Nécessité de recourir à l'expérience pour l'étude des lois de la résistance de l'air.	23

II. — Quelques lois empiriques de la résistance de l'air.

8. Forme générale des lois de la résistance de l'air pour les solides qui ont un plan de symétrie et dont la vitesse est parallèle à ce plan.	25
---	----

	Pages.
9. DÉPENDANCE DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR DE LA VITESSE DU SOLIDE. — Loi de proportionnalité de la résistance de l'air au carré de la vitesse.	26
10. DÉPLACEMENT ORTHOGONAL D'UN PLAN MINCE. — Détermination de la résistance de l'air en grandeur et position.	27
11. MOUVEMENT DU PLAN MINCE INCLINÉ SUR SA TRAJECTOIRE. — Loi de la proportionnalité de la résistance de l'air à l'angle d'attaque. Influence de l'envergure. Loi du déplacement du centre de pression.	28
12. LOIS DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR POUR LES SURFACES INCURVÉES. — La surface incurvée. Notion de plan fictif. Définition de l'angle d'attaque. Formules pour la traînée et la poussée. Le centre de pression. Son déplacement direct et inverse. Lois du déplacement du centre de pression. Portée générale des formules.	30
13. LOIS DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR POUR UN PLAN MINCE ANIMÉ SIMULTANÉMENT D'UNE TRANSLATION RECTILIGNE ET UNIFORME ET D'UN MOUVEMENT DE ROTATION. — Le principe différentiel relatif aux lois de la résistance de l'air. Portée du principe. Résistance supplémentaire due à la rotation. Le couple d'amortissement. Généralisation aux surfaces incurvées et disposition quelconque de l'axe de rotation.	35
14. LOIS DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR POUR UN PLAN MINCE DONT LA VITESSE N'EST PAS PARALLÈLE A SON PLAN DE SYMÉTRIE. — Tableau des positions probables du centre de pression. Valeur de la résistance de l'air. Le couple de renversement latérale. Généralisation aux surfaces incurvées.	40

CHAPITRE II.

LES CARACTÉRISTIQUES FONDAMENTALES DE L'AÉROPLANE.

I. — L'aéroplane.

15. Parties constitutives de l'aéroplane.	45
16. LA VOILURE. — Constitution de la voilure. Réduction de la voilure au plan mince fictif équivalent. La poussée résultante. La traînée résultante.	45
17. L'ESQUIF. — Constitution de l'esquif. Résistance de l'air de l'esquif. Le métacentre de l'esquif. La poussée résultante des hélices de l'appareil.	49
18. LES DISPOSITIFS DE DIRECTION ET DE STABILISATION DE L'AÉROPLANE. — Le gouvernail de profondeur. Le gouvernail vertical. Les dispositifs stabilisateurs mobiles. Les dispositifs stabilisateurs immobiles. Les empenages horizontaux. Les quilles ou cloisons verticales.	51
19. L'AÉROPLANE D'OTUDE.	53
20. POUSSÉE DE TOUT L'APPAREIL.	54

	Pages.
21. LA TRAINÉE DE TOUT L'APPAREIL.....	55
22. NOTION DE COUPLE CENTRAL. — Définition du couple central ; son rôle dans l'étude du mouvement de l'aéroplane.....	56

II. — Les régimes de translation rectiligne de l'aéroplane.

23. Définition du régime de translation rectiligne. Conditions de sa réalisation.....	57
24. LE RÉGIME HORIZONTAL EN AIR CALME.. — Rôle de la manœuvre du gouvernail de profondeur. Les équations caractéristiques du régime. Leur interprétation géométrique. Possibilité de deux régimes. Le régime normal.....	58
25. LE RÉGIME DE MONTÉE OU DE DESCENTE EN AIR CALME. — Les équations caractéristiques du régime. Leur interprétation géométrique. Montée et descente de l'appareil par la manœuvre du gouvernail de profondeur. Tableau des divers régimes possibles de montée et de descente. Rôle de la variation de la poussée des hélices.....	61
26. LE RÉGIME DE CHUTE PLANÉE EN AIR CALME. — Les équations caractéristiques et leur interprétation géométrique. Les divers régimes de planement possibles. Corrélation entre le planement et le régime horizontal ayant même angle d'attaque.....	63
27. LES RÉGIMES HORIZONTAUX PAR VENT RÉGULIER. — Les équations caractéristiques et leur interprétation géométrique. Analogie avec les régimes de montée et de descente.....	64
28. LES RÉGIMES DE MONTÉE ET DE DESCENTE PAR VENT RÉGULIER. — Les équations caractéristiques et leur interprétation géométrique. Le phénomène de l'aéroplane plaqué par le vent. Une condition essentielle à observer dans la construction des aéroplanes.....	65

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU COUPLE CENTRAL.

29. Importance de l'étude du couple central.....	68
--	----

I. — Détermination de la valeur du couple central.

30. DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT DIRECT DU CENTRE DE PRESSION. — Données générales pour le calcul du couple central. Couple central de l'appareil sans empennages horizontaux. Couple central de l'appareil avec queue. Couple central de l'appareil avec empennage horizontal d'avant..	69
31. DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT INVERSE DU CENTRE DE PRESSION. — Couple central de l'appareil sans empennages horizontaux. Couple central	

de l'appareil avec queue. Couple central de l'appareil avec empennage horizontal d'avant.....	74
---	----

II. — Étude comparative des variations du couple central.

32. COMMENT LE PROBLÈME DOIT ÊTRE POSÉ. — Facteurs dont dépend l'empennage horizontal. Influence de l'inclinaison de l'empennage. Considérations qui déterminent l'angle d'attaque de l'appareil. Impossibilité d'étudier le rôle des empennages horizontaux sur un même appareil invariable. Nécessité d'envisager une série d'appareils. Conditions qui déterminent la position relative de la voilure et de l'esquif d'un appareil.....	76
--	----

VARIATIONS DU COUPLE CENTRAL POUR L'APPAREIL SANS EMPENNAGES HORIZONTAUX.

1° Dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression.

33. Détermination de la position du centre de gravité. Dépendance de la variation du couple central, de la variation de la vitesse de l'appareil, et de la variation de son angle d'attaque. Graphique de la variation du couple central proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque. Variations du couple central dans le cas où les hélices de l'appareil sont décentrées.....	80
--	----

2° Dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression.

34. Position du centre de gravité. Graphique de la variation du couple central proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque. Influence de la décentration des hélices sur les variations du couple central.....	83
--	----

VARIATIONS DU COUPLE CENTRAL POUR LES APPAREILS MUNIS DE QUEUES.

1° Dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression.

35. Expression générale de la variation du couple central. Étude géométrique de la variation du couple central proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque. Influence de la décentration des hélices sur les variations du couple central.....	85
--	----

2° Dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression.

36. Expression générale de la variation du couple central. Les deux graphiques illustrant l'influence de l'inclinaison de la queue. Influence de la décentration des hélices.....	93
37. LE RÔLE DE LA QUEUE D'UN AÉROPLANE. — Conclusions générales. Indépendance du rôle de la queue, de la loi adoptée pour le déplacement du centre de pression. Disposition la plus efficace de la queue.....	97

VARIATIONS DU COUPLE CENTRAL POUR LES APPAREILS
MUNIS D'EMPENNAGES HORIZONTAUX D'AVANT.

<i>1° Dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression.</i>	
38. Graphique montrant l'influence de l'inclinaison de l'empennage. Influence de la décentration des hélices.....	99
<i>2° Dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression.</i>	
39. Graphique montrant l'influence de l'inclinaison de l'empennage.....	101
40. RÔLE DE L'EMPENNAGE HORIZONTAL D'AVANT D'UN AÉROPLANE. — Indépendance du rôle des empennages de la loi du déplacement du centre des pressions. Désavantage de l'emploi des empennages horizontaux d'avant.	102
41. REMARQUES GÉNÉRALES RELATIVES AUX EMPENNAGES HORIZONTAUX. — Expression générale du couple central.....	103
42. LA MANŒUVRE DU GOUVERNAIL DE PROFONDEUR. — Étude de la manœuvre. Interprétation géométrique. Formule approximative. Graduation du gouvernail.....	104
43. INFLUENCE DE LA MANŒUVRE DU GOUVERNAIL DE PROFONDEUR SUR LES VARIATIONS DU COUPLE CENTRAL. — Équation générale de l'influence de la manœuvre du gouvernail sur les variations du couple central. Interprétation graphique. Conclusion fondamentale.....	108

CHAPITRE IV.

L'ACTION DES QUILLES D'UN AÉROPLANE.

44. Les quilles produisent des forces et des couples supplémentaires qui n'interviennent que quand l'aéroplane dérape. Trois dispositions des quilles sont à distinguer.....	111
45. LES CENTRES DE PRESSION DES QUILLES SONT DISPOSÉS AU-DESSUS OU AU-DESSOUS DU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'APPAREIL. — La quille équivalente. La force latérale. Le couple de déviation. Le couple d'amortissement.	113
46. LES CENTRES DE PRESSION DES QUILLES SONT DISPOSÉS EN AVANT OU EN ARRIÈRE DU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'APPAREIL. — La quille équivalente. La force latérale. Le couple de déviation. Le couple d'amortissement.	114
47. LES CENTRES DE PRESSION DES QUILLES SONT DISPOSÉS À DROITE ET À GAUCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'APPAREIL. — De telles quilles ne produisent aucune action nouvelle. Tout système de quilles peut être ramené à une combinaison des cas précédents.	114

DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

CHAPITRE I.

STABILITÉ LONGITUDINALE.

I. -- Comment se pose le problème général de la stabilité de l'aéroplane.

Pages.

48. NOTION DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE. — La principale cause de trouble du régime de l'aéroplane. Formulation exacte du problème de la stabilité de l'aéroplane. Importance du temps d'amortissement des oscillations de l'aéroplane. Raisons pour lesquelles on est amené à n'étudier que les petits mouvements de l'aéroplane. 117

II. — Équations des petits mouvements de l'aéroplane dans son plan de symétrie.

49. Les paramètres qui définissent la déviation de l'appareil Les forces agissantes sur l'appareil. Équations des petits mouvements de l'aéroplane dans son plan de symétrie. 122

III. — L'équation caractéristique.

50. Le régime normal comme solution particulière du système d'équations des petits mouvements de l'aéroplane. L'équation caractéristique. 126

IV -- Les racines de l'équation caractéristique comme critères de stabilité de l'aéroplane.

51. Les divers systèmes possibles de racines. Première condition de stabilité. Le signe des racines. L'aéroplane apériodique, semi-périodique et périodique. 128
52. Seconde condition de stabilité. La nature et la valeur absolue des racines. Notion de temps d'amortissement. Degré de stabilité de l'aéroplane. 130
53. Le danger des racines égales de l'équation caractéristique. Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. 133

V. — Étude des racines réelles de l'équation caractéristique.

54. Mise en évidence des paramètres d'amortissement et de rappel de l'appareil. Interprétation géométrique de l'équation caractéristique. La courbe de solution de l'équation caractéristique. 135
55. Discussion des valeurs de tous les facteurs intervenant dans le problème de l'aéroplane. 138

	Pages.
56. Le cas de quatre racines réelles et négatives. L'équation caractéristique admet nécessairement deux racines petites en valeur absolue.	143
57. Tout aéroplane apériodique possède nécessairement un temps d'amortissement relativement grand.	146

VI. — Étude des racines complexes de l'équation caractéristique.

58. Établissement d'une méthode pour l'étude des parties réelles des racines complexes. — Le théorème de Cauchy relatif au nombre de zéros d'une fonction contenus dans un contour. Le contour mobile. Les quatre fonctions $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Application de la méthode de Sturm. Établissement d'une limite supérieure pour les parties réelles des racines complexes.	149
59. Application à l'équation caractéristique de l'aéroplane.	156
60. Tout aéroplane, qu'il soit périodique ou apériodique, possède nécessairement un temps d'amortissement relativement grand.	157

VII. — Les conclusions relatives à la stabilité longitudinale.

61. DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE AUTOUR D'UN RÉGIME QUELCONQUE. — L'équation caractéristique reste quasi-invariable. Elle n'est modifiée que très insensiblement pour le planement. Dans tous les cas le caractère d'amortissement des oscillations de l'aéroplane est conservé. Influence de la manœuvre du gouvernail de profondeur.	159
62. DÉTERMINATION DES DIMENSIONS DE L'AÉROPLANE LES PLUS FAVORABLES A SA STABILITÉ. — En air calme l'aéroplane est un appareil stable. La réalisation de l'appareil apériodique. Détermination des dimensions des empennages horizontaux de l'aéroplane. La vitesse de régime de l'aéroplane est, contrairement à l'opinion généralement admise, sans grande influence sur la stabilité de l'appareil.	161
63. DE LA RECHERCHE DES PROCÉDÉS DE STABILISATION DE L'AÉROPLANE. — Nécessité de recourir à des dispositifs mobiles. Les paramètres dont ces dispositifs peuvent être fonction. Introduction de termes complémentaires dans les équations des petits mouvements de l'aéroplane.	163

VIII. — Influence de la décentration des hélices.

64. MODIFICATION INTRODUITE DANS LES ÉQUATIONS DES PETITS MOUVEMENTS PAR LA DÉCENTRATION DES HÉLICES. — L'équation caractéristique. L'action stabilisatrice de la décentration des hélices. Toute action stabilisatrice des hélices est toujours accompagnée d'une action déstabilisatrice qui peut dans certains cas être compensée.	164
65. ÉTUDE DE L'ACTION STABILISATRICE DE LA DÉCENTRATION DES HÉLICES. — Discussion des racines de l'équation caractéristique. La courbe de solution de l'équation.	168

	Pages.
66. La réalisation de l'appareil semi-périodique est seule possible dans le cas de la stabilisation de l'aéroplane par la décentration des hélices. Supériorité de la stabilisation par empennages horizontaux. Confirmation des résultats acquis par le caractère général du vol de l'aéroplane Wright.....	172

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES PETITS MOUVEMENTS DE L'AÉROPLANE.

I. — Équations générales des petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime horizontal rectiligne.

67. Les paramètres qui définissent la déviation de l'aéroplane à partir de son régime.....	175
68. Le système de forces agissantes sur l'aéroplane.....	177
69. Le système général des équations du mouvement de l'aéroplane.....	179
70. Détermination de tous les cosinus directeurs qui interviennent dans le problème.....	180
71. Les équations des petits mouvements de l'aéroplane.....	184

CHAPITRE III.

STABILITÉ LATÉRALE.

72. Le système d'équations relatif au roulis et à la giration. L'équation caractéristique. Instabilité latérale de l'aéroplane. L'équation caractéristique pour l'appareil dénué de quilles. L'action de tout dispositif automatique capable d'assurer la stabilité latérale de l'aéroplane doit nécessairement être fonction de la giration de l'appareil.....	186
---	-----

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

73. La stabilité latérale de l'aéroplane ne peut être assurée que par quelque dispositif d'un caractère essentiellement mobile.....	189
74. La stabilité longitudinale que l'on peut assurer à un aéroplane rien que par ses formes extérieures et sa disposition générale, est pratiquement insuffisante. Comparaison du système de stabilisation Wright et du système français. Supériorité très marquée du système français.....	190
75. Explication de l'instabilité relative de l'aéroplane. De la possibilité pour le pilote d'assurer la stabilité longitudinale de l'aéroplane par la manœuvre du gouvernail de profondeur. La stabilité longitudinale de l'aéroplane ne peut, pratiquement, être parfaitement assurée que par quelque dispositif essentiellement mobile.....	191

PREMIÈRE PARTIE.

LES FORCES AGISSANTES SUR L'AÉROPLANE.

CHAPITRE I.

QUELQUES DÉFINITIONS ET QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX LOIS DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

1. Je n'ai nullement l'intention de donner un exposé même bref des lois de la résistance de l'air, sujet si vaste et si délicat. Mais actuellement il est fait en aviation un emploi si abusif des différents concepts fondamentaux de cette science, des spéculations si hasardeuses sont, on peut dire, journellement tentées avec les quelques formules aérodynamiques que nous possédons, que je considère comme nécessaire de commencer par préciser et définir, au moins d'une manière concise, les principales notions que nous aurons à employer et de donner un aperçu général des principales formules dont nous aurons à faire usage, formules dont je m'attacherai surtout à fixer la portée.

Ce domaine de l'aérodynamique a été ces derniers temps spécialement étudié par M. Paul Painlevé. Dans sa grande œuvre critique de l'aviation M. Paul Painlevé s'est surtout attaché à établir en toute rigueur les bases fondamentales de cette science nouvelle. Il a soumis à une profonde analyse les divers concepts fondamentaux de l'aérodynamique, il les a dégagés de l'indétermination et souvent même de l'incohérence qui les entourait, il en a donné des définitions précises bien adaptées au sujet, il les a mis d'accord avec les principes scientifiques généraux et en a indiqué

la portée exacte. On peut dire que ce n'est que grâce à ses travaux, d'une si grande portée philosophique, que le problème de l'aéroplane a été définitivement amené à la hauteur d'une question scientifique du plus grand intérêt. C'est en me conformant aux idées de cet éminent savant que je m'attacherai à faire l'exposé de ce Chapitre (1).

1. — QUELQUES CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE DANS UN FLUIDE.

2. Quand, dans la mise en scène terrestre, un *solide* se déplace, son mouvement s'effectue nécessairement dans un fluide, l'air ou l'eau le plus généralement.

Si la vitesse du solide est relativement faible et le fluide peu visqueux, l'action du milieu fluide sur le mouvement du solide est très peu sensible. On peut sans erreur appréciable en faire abstraction et l'on est ainsi amené à envisager le mouvement du solide dans l'espace vide.

Mais quand la vitesse du solide atteint une certaine valeur, ou que le fluide est essentiellement visqueux, l'action du milieu sur le mouvement du solide devient primordiale. Dans ce cas, pour rendre compte du mouvement du solide, on doit, en outre de toutes les autres forces qui peuvent agir sur le solide et parmi lesquelles figure nécessairement la *poussée archimédienne*, adjoindre un *système de forces* qui exprime l'action du fluide sur les divers

(1) M. Paul Painlevé a exposé l'ensemble de ses travaux sur l'aviation dans son remarquable cours de *Mécanique de l'Aviation* professé en 1909-1910 à l'Ecole Supérieure d'Aéronautique. Ces travaux n'ont été jusqu'ici que partiellement exposés dans un très petit nombre de publications parmi lesquelles je citerai :

Théorie de l'aéroplane (Extrait du cours de Mécanique de l'École Polytechnique de Paris, année scolaire 1908-1909). Autographié.

Étude sur le régime normal d'un aéroplane. La Technique aéronautique, n° 1, 1^{er} janvier 1910.

L'Aéroplane. IV^e Congrès international d'Aéronautique. Nancy, 18-23 septembre 1909. (Dunod et Pinat, éditeurs).

L'Aviation (en collaboration avec E. Borel), Félix Alcan, éditeur, 1910; (La Note I de cet Ouvrage constitue un résumé de la *Théorie de l'aéroplane* professée à l'École Polytechnique en 1908-1909.

éléments de la surface du solide en mouvement. Ce *système de forces superficielles*, qui est *distribué sur toute la surface du solide*, est généralement désigné par *résistance du fluide*.

Pour un solide quelconque, animé d'un mouvement quelconque dans un certain fluide, la détermination de la résistance du fluide est un problème extrêmement complexe et généralement inextricable tant expérimentalement que théoriquement. Seulement quelques cas particuliers très simples, qui se rapportent principalement au mouvement de translation rectiligne et uniforme du solide, ont pu jusqu'ici être soumis à une analyse plus ou moins détaillée.

3. Envisageons un solide amené d'une façon pas trop brusque à un état de vitesse de translation rectiligne et uniforme dans un milieu fluide immobile dans son ensemble par rapport à la terre, de température uniforme et constante et de dimensions telles que les perturbations causées par le mouvement du solide n'arrivent pas à atteindre la surface limitrophe du fluide. Dans ces conditions au bout d'un temps assez court, après que la vitesse du solide est devenue constante, un certain état stationnaire s'établit. Le solide promène avec lui à travers le fluide une agitation du milieu l'environnant qui reste toujours semblable à elle-même tant que la vitesse du solide reste constante et la *résistance du fluide conserve une configuration invariable* tant en grandeur de ses divers éléments qu'en orientation. Pour caractériser un tel état des choses nous dirons qu'un *régime* s'est établi. Pour un fluide dénué de viscosité le régime dépend en général de la manière dont le solide a été amené à l'état de vitesse considérée, mais pour un fluide réel, la viscosité tend, pour ainsi dire, à uniformiser tous les régimes possibles et, en général, c'est toujours le même régime qui s'établit quand le solide atteint la même vitesse.

Pour un solide donné, se déplaçant dans un milieu fluide à une vitesse constante déterminée, correspond donc une résistance du fluide déterminée.

Nous avons considéré le milieu fluide immobile et le solide se déplaçant dans le fluide, mais on conçoit aisément que la résistance du fluide ne dépend que de la vitesse relative du solide par rapport

à l'ensemble du milieu fluide, c'est-à-dire qu'il est absolument indifférent que ce soit le fluide qui soit en mouvement et le solide immobile par rapport à la terre ou inversement, ou même encore que le solide et le fluide soient tous deux en mouvement. Ce fait qui constitue le *principe de relativité de l'hydrodynamique* découle en toute rigueur et indépendamment de toute hypothèse sur la résistance du fluide, de ce que les équations fondamentales de la dynamique sont indépendantes de la vitesse de translation rectiligne et uniforme du système de référence auquel on les rapporte. Il importe de remarquer que dans les divers cas toutes les autres conditions d'expérience doivent être exactement les mêmes, sinon la résistance du fluide est modifiée. La réalisation pratique de cette dernière exigence étant fort difficile, le principe de relativité a donné lieu à de nombreuses controverses dans la discussion de certaines expériences aérodynamiques. Mais quand toutes les précautions sont prises pour la réalisation de régimes relatifs identiques, il se vérifie expérimentalement dans son intégrité.

4. Soit $\bar{R}$ (la force résultante) et $\bar{M}$ (le moment résultant) les deux composantes du torseur ⁽¹⁾ résultant de la résistance du fluide. Quand pour le solide considéré le régime est atteint $\bar{R}$ et $\bar{M}$ sont indépendants du temps et fonctions seulement de la vitesse relative $\bar{V}$ du solide par rapport à l'ensemble du milieu fluide, tant en grandeur qu'en orientation par rapport au solide.

Par loi de la résistance d'un fluide à la translation rectiligne et uniforme d'un solide, nous entendrons les formules qui nous feront connaître, en grandeur et position par rapport au solide, $\bar{R}$ et $\bar{M}$ en fonction des caractéristiques de la forme et des dimensions du solide considéré et de la vitesse relative $\bar{V}$ du solide par rapport à l'ensemble du milieu fluide.

Remarquons de suite que les composantes $\bar{R}$ et $\bar{M}$ du torseur résultant ne remplacent nullement sous tous les rapports la

⁽¹⁾ Par torseur nous entendons l'ensemble d'une force et d'un couple dont l'axe a même direction que la force.

résistance du fluide, mais à un seul et unique point de vue, à savoir : les modifications qu'introduit la résistance du fluide dans le mouvement d'un *solide* sont les mêmes, quand on remplace la résistance du fluide par son torseur résultant. Sous aucun autre rapport $\bar{R}$ et $\bar{M}$ ne sont équivalents à la résistance du fluide. Ainsi, par exemple, la distribution des forces intérieures du solide est complètement modifiée quand on substitue le système $\bar{R}$ et $\bar{M}$ à la résistance du fluide. Le torseur résultant d'un système de forces n'est au fond qu'une transformation purement analytique faite dans le but de réduire à sa forme la plus simple l'étude du mouvement du solide auquel le système est appliqué. Le torseur résultant n'est du reste déterminé qu'à un degré de liberté près, sa position sur sa direction étant absolument arbitraire. Il n'y a aucun intérêt à chercher à préciser la position du torseur sur sa direction, cette donnée ne pouvant nous fournir aucune indication supplémentaire sur le mouvement du solide. Le mouvement d'un solide est complètement déterminé quand le torseur résultant du système de forces qui le sollicite est connu en grandeur, direction et sens, la position du torseur sur sa direction n'intervenant pas dans les équations du mouvement.

5. *Quand le solide considéré possède un plan de symétrie parallèle à sa vitesse, la résistance du fluide se réduit à une résultante unique contenue dans le plan de symétrie du solide et dont la projection sur la direction de la vitesse a toujours un sens contraire à celui de la vitesse.*

Justifions brièvement cette proposition fondamentale.

La projection de la résistance du fluide sur la direction de la vitesse est généralement dans ce cas désignée par *trainée*, tandis que sa projection sur la normale à la vitesse est désignée par *poussée*.

Considérons le solide en mouvement.

On conçoit aisément que le solide ayant un plan de symétrie parallèle à sa vitesse, indépendamment de toute hypothèse sur la résistance du fluide, ce système est symétriquement disposé par rapport au plan de symétrie du solide. En composant deux à deux les forces symétriques appliquées aux divers éléments du solide, on obtient un système de forces contenu dans le plan de symétrie

et qui comme tout système de forces contenu dans un plan, se ramène ou bien à une résultante unique ou bien à un couple.

Montrons que la réduction à un couple est inadmissible. En effet, faisons l'hypothèse contraire; admettons pour un instant que la résistance du fluide puisse se ramener à un couple unique situé dans le plan de symétrie du solide. Nous sommes alors obligés de conclure que si nous communiquons au solide une certaine vitesse de translation rectiligne et uniforme, puis que nous l'abandonnions à lui-même, ce dernier non seulement conservera sa vitesse de translation rectiligne, mais encore prendra un mouvement de rotation accélérée autour d'un axe normal à son plan de symétrie, puisque les seules forces qui agissent sur le solide sont la résistance du fluide ⁽¹⁾ qui se réduit à un couple situé dans le plan de symétrie du solide. Un tel fait serait en contradiction flagrante avec tout ce que nous savons de l'ordre des choses dans l'univers. Ce serait la solution du problème du mouvement perpétuel. Le solide animé du mouvement de rotation accélérée pourrait servir de source éternelle d'énergie. Nous sommes donc obligés de conclure que la réduction de la résistance du fluide à un couple unique est inadmissible. Ce fait se rapporte aussi au cas général où le solide n'a pas de plan de symétrie.

La résistance du fluide dans le cas d'un solide ayant un plan de symétrie est donc nécessairement réductible à une résultante unique.

Il est tout aussi aisé de voir que la projection de cette résultante unique sur la vitesse c'est-à-dire la traînée ne peut avoir le sens de la vitesse. Et en effet si ceci avait lieu, le solide amené à l'état de vitesse de translation rectiligne et uniforme devrait se comporter d'une façon tout à fait invraisemblable. Ainsi, par exemple, abandonné à lui-même il prendrait un mouvement de translation accélérée car il ne serait sollicité que par une force agissante dans le sens de sa vitesse; relié à un véhicule, dont la résistance à l'avancement n'est pas supérieure à sa traînée, le solide pourrait le remor-

(1) A part la pesanteur et la poussée archimédienne que nous supposons équilibrées. On peut, par exemple, puisque seule la surface du solide intéresse la résistance du fluide, supposer le solide évidé dans une telle mesure que la poussée archimédienne contrebalance exactement la pesanteur, c'est-à-dire que le solide immobile dans le fluide y soit en équilibre indifférent.

quer, etc. De telles possibilités sont absolument inadmissibles. Nous pouvons donc affirmer que la traînée du solide est toujours de sens contraire à sa vitesse. Un solide en mouvement de translation rectiligne et uniforme dans un fluide rencontre donc toujours une résistance à l'avancement.

Remarquons enfin, qu'aucun point de la direction de la résultante unique, à laquelle la résistance du fluide se ramène, dans le cas d'un solide possédant un plan de symétrie, ne doit être distingué ni considéré comme point d'application de cette résultante.

Tout ce qui précède n'exclut évidemment pas la possibilité pour un solide de prendre aussi un mouvement de rotation par l'effet de sa translation dans un fluide.

6. Tout ce que nous avons dit relativement à la translation rectiligne et uniforme d'un solide dans un milieu fluide, pourrait se répéter parallèlement pour la rotation d'un solide autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. Les lois de la résistance du fluide pour la rotation sont en général différentes de celles relatives à la translation rectiligne, mais quand le rayon de la trajectoire circulaire est grand, les lois de la résistance du fluide pour la rotation uniforme se confondent très sensiblement avec les lois relatives à la translation rectiligne.

On peut aussi avoir à considérer un mouvement de régime plus général encore, par exemple hélicoïdal, dans ce cas encore, de même que pour les cas précédents, la résistance du fluide a une signification parfaitement déterminée.

7. Toutes les conclusions qui précèdent découlent d'une analyse directe du phénomène de la résistance d'un fluide sans avoir recours à aucune hypothèse sur la nature et le caractère de cette résistance ; c'est pourquoi elles constituent la base fondamentale de nos connaissances de la résistance d'un fluide.

De plus amples indications sur la résistance d'un fluide ne peuvent être fournies par des considérations théoriques sans la connaissance des propriétés particulières des fluides qui donnent lieu au phénomène que nous appelons *résistance d'un fluide*. Ces propriétés quoique connues dans leurs grands traits n'ont pu

jusqu'ici, ni être suffisamment précisées, ni exprimées sous une forme telle qu'on puisse aborder théoriquement le problème de la résistance d'un fluide avec quelque succès. Il ne faudrait pas croire que sous ce rapport les phénomènes hydrodynamiques occupent une place spéciale parmi les phénomènes de la nature. Tout au contraire, chaque fois que dans un problème physique le phénomène de dissipation d'énergie joue un rôle prédominant, comme ceci a lieu pour les phénomènes hydrodynamiques, le problème est généralement très pénible à traiter. Dans le système des sciences physiques deux grandes catégories de phénomènes doivent être distinguées : les phénomènes réversibles et les phénomènes irréversibles. Les premiers sont des phénomènes idéaux qui embrassent la nature sous une première abstraction. Par la considération du phénomène réversible nous dégageons d'un complexe de phénomènes naturels le cas limite où un phénomène se trouve isolé. L'étude des phénomènes réversibles a été poussée très loin, on peut même dire que nous en possédons une connaissance complète. Il en est tout autrement en ce qui concerne les phénomènes irréversibles. Très peu de résultats généraux les concernant ont pu jusqu'ici être dégagés et à de rares exceptions près où des relations simples ont pu être observées, nos connaissances des phénomènes irréversibles sont très limitées. On peut même dire qu'actuellement la science dans son développement n'en est qu'au début de l'étude des phénomènes irréversibles et c'est aux siècles futurs qu'il appartient de nous éclairer plus complètement sur la vraie nature de ces phénomènes. Tout phénomène de la nature est irréversible. Dans certains cas, le phénomène réel se rapproche suffisamment d'un phénomène réversible pour être considéré comme tel avec une exactitude pratiquement suffisante. Dans d'autres cas, au contraire, cette approximation est complètement illusoire. Tel est le cas des phénomènes hydrodynamiques. Quand dans ces conditions la connaissance de tels phénomènes nous est nécessaire, quand elle est demandée par des exigences sociales, nous ne pouvons que recourir à l'expérience directe et tâcher d'établir des lois purement empiriques, d'une portée nécessairement fort étroite, mais suffisamment exactes pour suffire aux besoins de la pratique. C'est généralement dans de telles voies que sont amenés à travailler les ingénieurs. C'est d'ailleurs le

processus général du développement des connaissances humaines. La vie exige..., l'artisan cherche à satisfaire ces exigences..., le penseur vérifie, compare, complète, systématise et résume les faits acquis. L'étude expérimentale d'un phénomène est dans la plupart des cas fort difficile et fort délicate. Généralement, on ne peut soumettre à l'expérimentation que des cas très particuliers et encore des soins minutieux doivent être pris et un profond esprit critique doit animer les recherches pour que quelque phénomène parasite ne vienne pas masquer le phénomène à observer et ainsi complètement fausser les résultats. C'est pourquoi un résultat expérimental ne doit en général être accrédité qu'après avoir été soumis à de nombreuses et diverses vérifications.

Nous allons brièvement exposer les principaux résultats expérimentaux acquis relativement aux lois de la résistance de l'air pour les divers cas particuliers qui nous intéressent spécialement. Le milieu atmosphérique sera considéré dans les conditions normales de température (15°C.) et de pression (760^{mm} de mercure). Les unités adoptées seront le mètre, le kilogramme-poids et la seconde.

II. — QUELQUES LOIS EMPIRIQUES DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

8. Considérons un solide possédant un plan de symétrie et animé dans l'air atmosphérique d'une vitesse $\bar{V}$ de translation rectiligne et uniforme parallèle à ce plan. Une fois le régime établi, d'après les considérations générales qui précèdent, la résultante unique R à laquelle la résistance de l'air se ramène dans ce cas, sera en grandeur une certaine fonction :

1° De la grandeur V de la vitesse du solide;

2° De l'orientation de $\bar{V}$ par rapport au solide. Comme $\bar{V}$ est parallèle au plan de symétrie du solide, l'orientation de V par rapport au solide sera complètement déterminée par l'angle que fait $\bar{V}$ avec une droite invariablement liée au solide et située dans le plan de symétrie de ce dernier. Nous désignerons généralement cet angle par i et nous le considérerons exprimé en radians.

3° De la forme et des dimensions du solide.

Nous pouvons donc écrire qu'en général pour le cas particulier que nous envisageons

$$R = \mathcal{F}(V, i, D),$$

où par D nous désignons une certaine fonction des caractéristiques de la forme et des dimensions du solide.

En ce qui concerne $\bar{R}$ en position et orientation par rapport au solide, nous savons que $\bar{R}$ est situé dans le plan de symétrie du solide. Il nous suffira donc pour compléter cette détermination de connaître par exemple un point de $\bar{R}$ et l'angle que fait $\bar{R}$ avec une droite invariablement liée au solide et située dans son plan de symétrie. Cette droite de référence pourra être la même que celle choisie pour repérer l'orientation de la vitesse $\bar{V}$ du solide.

9. Dépendance de la résistance de l'air de la vitesse du solide. — De nombreuses expériences effectuées sur des solides de formes diverses ont permis de constater que très sensiblement R était proportionnel, dans la majorité des cas, au carré de la vitesse du solide pour des valeurs de cette vitesse comprises en chiffres ronds entre 10 m : sec et 50 m : sec environ, limites dans lesquelles sont largement comprises les vitesses de tous les avions actuels. Cette proportionnalité de R à V^2 est parfaitement vérifiée pour le déplacement orthogonal des plans minces de contours réguliers ⁽¹⁾. Elle se vérifie aussi pour le mouvement des plans minces ⁽²⁾ et des surfaces incurvées ⁽³⁾ employées en aviation, inclinés sur leur trajectoire. Cette proportionnalité est aussi constatée pour la résistance des carènes des dirigeables. Enfin même pour des solides de forme quelconque, quoique dans une plus large approximation cette proportionnalité est aussi généralement observée. Par exemple, la résistance de l'air des tramways électriques, des trains de chemin de fer, etc. Mais toujours sous la réserve de vitesses comprises entre

(1) Consulter par exemple les travaux de M. G. Eiffel qui sont les plus précis que nous possédions sur la question.

M. G. EIFFEL, *Recherches expérimentales sur la résistance de l'air*, 1907 ; *Installation d'un laboratoire d'aérodynamique* (Extrait des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France*, Bulletin de Janvier 1910).

(2) *Ibidem*.

(3) *Ibidem*.

10 m : sec et 50 m : sec environ. Toutefois pour de faibles vitesses R serait plutôt proportionnel à V et pour des vitesses plutôt voisines de 50 m : sec à des puissances de V supérieures à 2. En définitive nous pouvons considérer que pour

$$10 \text{ m : sec} < V < 50 \text{ m : sec},$$

R est proportionnel à V^2 et par conséquent écrire

$$(1) \quad R = V^2 f(i, D).$$

On peut même dire que la proportionnalité de R à V^2 , dans les limites indiquées pour la valeur de V , est ce que nous avons de mieux établi relativement aux lois de la résistance de l'air.

Les expériences qu'on effectue sur la résistance de l'air ont généralement pour but d'élucider pour divers cas particuliers la forme de la fonction $f(i, D)$ de la formule (1).

10. Déplacement orthogonal d'un plan mince. — Envisageons un *plan mince*, c'est-à-dire une plaque dont l'épaisseur est négligeable comparativement à ces autres dimensions, animé d'une vitesse normale à sa surface. Pour ce cas relativement simple, l'expérience a toujours vérifié, comme il était d'ailleurs aisé de le prévoir, que la résistance de l'air peut être exprimée par la formule

$$(2) \quad R = KAV^2,$$

où V est la vitesse du plan mince exprimée en m : sec., A son aire en mètres carrés et K une constante qui dépend des unités choisies et qui est généralement appelée *coefficient de la résistance de l'air*.

D'après les expériences de M. G. Eiffel pour des plans assez grands de plusieurs mètres carrés de surface, le coefficient K aurait très sensiblement la valeur

$$K = 0,08.$$

Ce qui concerne $\bar{R}$ en position et en orientation par rapport au plan mince, $\bar{R}$ est normal au plan mince et passe par le centre des moyennes distances du plan mince (centre de gravité du plan mince considéré comme homogène). Ce point d'intersection de $\bar{R}$ avec le plan mince peut être appelé, comme on a coutume de le faire,

centre de pression sans toutefois adjoindre à cette dénomination aucun autre sens que celui de désigner le point d'intersection de $\bar{R}$ et du plan mince.

11. **Mouvement du plan mince incliné sur sa trajectoire.** — En ce qui concerne ce cas, on a longtemps discuté pour savoir si R était proportionnel à l'angle d'attaque i ou à son carré ⁽¹⁾ en entendant par angle d'attaque, l'angle de $\bar{V}$ et du plan mince. Actuellement certaines considérations indirectes et de nombreuses expériences, entre autres les expériences précises de M. G. Eiffel ne nous permettent plus de douter. R doit être considéré proportionnel à l'angle d'attaque pour les valeurs de i comprises entre 0° et 30° environ. Pour des valeurs supérieures de l'angle d'attaque R est sensiblement indépendant de i et approximativement égal à la valeur qu'il a pour le déplacement orthogonal du plan mince.

On peut donc pour

$$0^\circ < i < 30^\circ$$

adopter pour $\bar{R}$ la formule

$$(3) \quad R = K' A V^2 i$$

ou A est l'aire du plan mince et K' un certain coefficient ayant une signification toute différente de celle du cas précédent et qui ne peut être considéré comme constant que pour des plans minces géométriquement semblables. Ainsi pour le cas, qui nous intéresse particulièrement, des plans minces de périmètre rectangulaire K' dépend essentiellement du rapport des côtés du contour rectangulaire. Si nous convenons de désigner par *envergure* la dimension du plan mince normale à sa vitesse et par *largeur* sa dimension dans le lit du vent, on peut dire que le coefficient K' dépend essentiellement du rapport de l'envergure à la largeur. En particulier, l'expérience a montré que K' croît très sensiblement avec l'envergure du plan mince. Suivant certains expérimentateurs, la plus

⁽¹⁾ Plus exactement au sinus de l'angle d'attaque ou au carré de ce sinus. Mais pour les petits angles d'attaque, que nous avons principalement en vue, on peut avec une approximation parfaitement compatible avec l'approximation générale de nos connaissances aérodynamiques indifféremment écrire i pour $\sin i$ ou inversement.

grande valeur du coefficient K' serait déjà obtenue pour un rapport de l'envergure à la largeur égal à six environ. Cette question de l'influence de l'envergure ne peut être considérée comme définitivement éclairée quantitativement, mais l'influence favorable de l'envergure sur l'accroissement de K' est incôtestable et constitue une connaissance extrêmement précieuse pour la pratique de l'aviation. Ce qui concerne la valeur numérique de K' pour un plan mince de contour rectangulaire dont l'envergure est égale à la largeur, ce coefficient est environ le double du coefficient K relatif au déplacement orthogone du plan mince c'est-à-dire que

$$K' \cong 0,16.$$

Quand l'envergure du plan mince est supérieure à sa largeur, K' prend des valeurs qui vont jusqu'à $K' = 0,25$ environ et même probablement au delà.

En orientation, pour des angles d'attaque qui ne sont pas excessivement petits, $\bar{R}$ est très sensiblement normal au plan mince, et comme il est situé dans le plan de symétrie du plan mince, nous pouvons complètement repérer $\bar{R}$ en position par la connaissance du point d'intersection de R avec le plan mince. De même que précédemment on peut désigner ce point par *centre de pression* sans voir toutefois dans cette dénomination autre chose qu'un repère conventionnel fixant la position de $\bar{R}$ par rapport au plan mince. Les données expérimentales que nous possédons permettent de conclure que la position du centre de pression est très sensiblement indépendante de la grandeur de la vitesse du plan mince, mais que par contre, elle dépend essentiellement de la valeur de l'angle d'attaque. Quand i varie de 90° à 0° le centre de pression, que nous désignerons par C , se rapproche continuellement à partir du centre du plan mince vers son bord d'attaque et tend vers une position limite C_0 située près du bord d'attaque du plan mince à une distance comprise entre environ $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de la largeur du plan mince. Pour des variations de i comprises dans un intervalle de quelques degrés, la distance $C_0 C$ est très sensiblement une fonction linéaire de i et peut donc être représentée par une formule de la forme

$$(4) \quad C_0 C = p h i$$

où h désigne la demi-largeur du plan mince et p une certaine constante de dimension nulle. Suivant les expériences de M. G. Eiffel ⁽¹⁾ $C_0 C$ serait même très sensiblement une fonction linéaire de i dans l'intervalle de 0° à 15° environ. En ce qui concerne la valeur numérique de p on n'est pas encore bien fixé. Les chiffres fournis par les divers expérimentateurs sont généralement compris entre 0,5 et 1. Par exemple suivant Avanzini et Jøessel p serait égal à environ $p \cong 0,6$. D'après les expériences de M. G. Eiffel p serait plutôt égal à $p \cong 1$ ⁽²⁾. Dans les calculs que nous aurons à faire pour donner au moins une certaine idée quantitative approchée de certains phénomènes c'est cette dernière valeur que nous adopterons vu sa simplicité. On voit ainsi que les données quantitatives concernant les déplacements du centre de pression sont encore assez imprécises, mais ce qui nous importe, c'est que nous avons une connaissance générale du phénomène : à savoir l'existence de la position limite du centre de pression pour i tendant vers zéro et ses déplacements assez réguliers pour de petites variations de i , ce qui nous permet d'exprimer ces déplacements pour de telles variations de i par une formule linéaire. Les expériences futures pourront préciser la valeur du coefficient p , elles pourront peut-être nous amener à compléter notre formule linéaire par des termes correctifs d'un ordre supérieur, mais le tableau général que nous avons fait des déplacements du centre de pression sera incontestablement toujours une première approximation du phénomène.

12. Lois de la résistance de l'air pour les surfaces incurvées. — Par surfaces incurvées on désigne en aviation des surfaces cylindriques, généralement d'assez faible courbure, dont les génératrices sont normales à leur plan de symétrie et dont le contour est sensiblement rectangulaire. Le mouvement de ces surfaces se fait sous une faible inclinaison sur leur trajectoire. Ces surfaces, vu leur qualité remarquable de donner pour une même poussée comparativement à un plan mince une moindre traînée, ont une

⁽¹⁾ M. G. EIFFEL, *Installation d'un laboratoire d'aérodynamique* (Extrait des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France*, Bulletin de Janvier 1910), voir le diagramme de la p. 32.

⁽²⁾ Autant que l'on en peut juger d'après le diagramme indiqué dans la Note ⁽¹⁾ ci-contre.

très grande importance en aviation. Les profils de ces surfaces varient suivant les divers types d'aéroplanes actuellement existants. Ce sont généralement des profils d'allure sensiblement parabolique dont la flèche située vers le bord d'attaque est généralement comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}$ de la largeur de la surface. Remarquons de suite qu'au point de vue de la résistance de l'air on ne peut jamais, pour une surface incurvée donnée, trouver un plan mince qui ait même traînée et même poussée. A ce point de vue le plan mince et la surface incurvée sont essentiellement différents et il ne peut jamais y avoir équivalence entre eux. Mais nous pouvons toujours à chaque surface incurvée faire correspondre un plan mince doué de *propriétés fictives* telles qu'il soit complètement équivalent à la surface incurvée au point de vue de la résistance de l'air. Le rôle et la signification d'un tel plan mince ont été pour la première fois présentés dans leur vraie lumière par M. Paul Painlevé qui l'a désigné par *plan fictif* lié à la surface incurvée. L'idée de plan fictif est dictée par le désir d'une étude parallèle et comparative des plans minces et des surfaces incurvées. Le plan fictif lié à une surface incurvée est uniquement un plan de référence ayant une signification purement conventionnelle, mais d'un emploi fort commode et fort rationnel pour y rapporter toutes les caractéristiques des surfaces incurvées au point de vue de la résistance de l'air.

Considérons une surface incurvée se déplaçant dans l'air atmosphérique avec une certaine vitesse constante $\bar{V}$ et faisons la tourner autour d'un axe quelconque normal à son plan de symétrie. Il arrivera un moment où la corde du profil de la surface incurvée ne faisant qu'un petit angle avec la vitesse, la résultante unique $\bar{R}$ de la résistance de l'air sera dirigée suivant $\bar{V}$ évidemment de sens contraire comme nous l'avons précédemment indiqué. Le plan normal au plan de symétrie de la surface incurvée et contenant $\bar{R}$ quand $\bar{R}$ coïncide avec $\bar{V}$ en direction, sera en *orientation et position* le *plan fictif* lié à la surface incurvée. Nous précisons les dimensions du plan fictif, simplement guidés par un désir géométrique. Pour cela on peut par exemple projeter le contour de la surface incurvée sur le plan fictif. On a ainsi un lien fort simple entre la surface incurvée et le plan fictif qui est complètement déterminé. C'est par rapport au plan fictif ainsi défini que nous allons repérer toutes les caractéristiques des surfaces incurvées au

point de vue de leur résistance de l'air. Le plan fictif ainsi compris est non seulement un auxiliaire commode pour l'étude des surfaces incurvées, mais il nous fournit surtout une base uniforme pour leur comparaison.

Par *angle d'attaque* i d'une surface incurvée nous entendrons l'angle de $\bar{V}$ et du plan fictif de la surface incurvée. Par définition même de l'angle d'attaque, la poussée de la surface incurvée est nulle pour $i = 0$.

Envisageons la résultante $\bar{R}$ de la résistance de l'air d'une surface incurvée que nous considérons décomposée en ses deux composantes la poussée N et la traînée F . Si nous nous limitons à des surfaces de contours sensiblement rectangulaires et semblables, on peut d'après les considérations générales précédemment exposées, voir aisément que N et F peuvent être exprimés par des formules de la forme :

$$(5a) \quad N = K'_1 A V^2 \pi(i),$$

$$(5b) \quad F = K'_1 A V^2 \tau(i),$$

où K'_1 est une certaine constante qui dépend des unités choisies et A l'aire de la surface envisagée. Considérons les fonctions $\pi(i)$ et $\tau(i)$ développées suivant la puissance de i . C'est à l'expérience que nous devons demander de nous fournir la valeur des coefficients de ces développements. On conçoit aisément que, pour de petites valeurs de i , qui sont celles qui nous intéressent uniquement, des expériences d'une approximation relative, comme le sont les expériences aérodynamiques, ne peuvent nous permettre d'observer que les premiers termes des développements de $\pi(i)$ et $\tau(i)$. C'est ainsi qu'on trouve que N est très sensiblement proportionnel à i , les termes d'ordre supérieur étant très petits et que F est une fonction du second degré en i mais dont le terme à la première puissance de l'angle d'attaque est sensiblement négligeable. On peut donc en définitive pour de petites valeurs de i exprimer N et F par les formules

$$(6a) \quad N = K_1 A V^2 i,$$

$$(6b) \quad F = K_1 A V^2 (ri^2 + s).$$

Quand on considère des surfaces incurvées de contour sensible-

ment rectangulaire mais non semblables alors le coefficient K_1 , de même que pour les plans minces dépend du rapport de l'envergure à la largeur et croît avec l'envergure.

En ce qui concerne les valeurs numériques des coefficients des formules (6a) et (6b) elles dépendent essentiellement du profil de la surface incurvée et sont très difficiles à mesurer. Dans une première approximation on peut toutefois considérer, pour les surfaces incurvées actuellement employées en aviation, que r diffère peu de l'unité ($r \cong 1$); que s est très petit, de l'ordre de 0,01 et même inférieur, enfin que K_1 pour un rapport de l'envergure à la largeur de 3 à 6, est égal à environ $K_1 \cong 0,3$ et même supérieur. Ces données numériques n'ont pas d'autre prétention que celle de donner une première idée de l'ordre de grandeur de ces coefficients et d'illustrer ainsi plus complètement la signification des formules (6a) et (6b). Il est bien entendu que ces dernières formules ne sont valables que pour de petites valeurs de l'angle d'attaque comprises entre 1° et 15° environ.

Pour déterminer R en orientation et position par rapport à la surface incurvée que nous savons située dans le plan de symétrie de cette dernière, nous considérons l'inclinaison de R par rapport au plan fictif liée à la surface incurvée et son point d'intersection avec ce plan, que nous désignons par *centre de pression*. Pour des valeurs de i comprises entre 0° et 15° environ, mais qui ne sont pourtant pas excessivement petites, l'expérience a généralement montré que $\bar{R}$ s'écarte peu de la normale au plan fictif et par conséquent dans une première approximation. R peut être considéré comme perpendiculaire au plan fictif lié à la surface incurvée.

En ce qui concerne les déplacements du centre de pression les données que nous possédons sont assez imprécises et même contradictoires. L'existence d'une position limite C_0 du centre de pression pour $i = 0$ n'est mise en doute par personne, mais les opinions se partagent sur la question du déplacement du centre de pression quand i croît à partir de sa valeur nulle. Suivant certains expérimentateurs, le centre de pression s'éloignerait du bord d'attaque comme pour les plans minces, suivant d'autres, au contraire, il s'en approcherait. Ainsi pour un profil circulaire M. G. Eiffel a observé le rapprochement du centre de pression du bord d'attaque

quand i varie de 0° à 15° environ ⁽¹⁾. On conçoit aisément que le déplacement du centre de pression dépend essentiellement de l'allure du profil de la surface incurvée, et il est fort probable que suivant les divers profils le sens de déplacement du centre de pression est différent. C'est pourquoi nous jugeons nécessaire d'admettre les deux possibilités pour le sens du déplacement du centre de pression. Quand le centre de pression sera considéré s'éloignant du bord d'attaque quand i croît, comme c'est le cas pour les plans minces, nous dirons que le déplacement du centre de pression est *direct*, dans le cas contraire nous dirons que le déplacement du centre de pression est *inverse*. Pour de petites valeurs de l'angle d'attaque comprises entre 0° et 15° environ et pour de faibles variations de i autour d'une telle valeur on peut toujours, dans une première approximation, considérer que le déplacement du centre de pression C se fait suivant une loi linéaire et par conséquent poser :

(7a) Pour le déplacement direct $C_0 C = p_1 h i$,

(7b) Pour le déplacement inverse $C_0 C = p_2 h i$

où p_1 et p_2 sont deux constantes de dimension nulle dont la valeur dépend essentiellement de l'allure du profil de la surface incurvée, h la demi-largeur de la surface incurvée et des sens inverses étant dans les deux cas adoptés pour la mesure des longueurs positives suivant la ligne d'intersection du plan de symétrie de la surface incurvée et de son plan fictif. A défaut d'indications sur les valeurs numériques de p_1 et p_2 on peut, dans une première approximation, présumer que p_1 et p_2 sont probablement de même ordre de grandeur que le coefficient p pour le cas des plans minces ⁽²⁾.

On voit ainsi que nos connaissances des lois de la résistance de l'air des surfaces incurvées sont actuellement encore fort peu précises, surtout en ce qui concerne la variation de $\bar{R}$ en orientation et position. Mais quand on n'aura à envisager que des variations de V et de i comprises dans d'assez petits intervalles, quels que

⁽¹⁾ G. EIFFEL, *Installation d'un laboratoire d'aérodynamique* (Extrait des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France*, Bulletin de Janvier 1910) voir le diagramme de la p. 28.

⁽²⁾ Ainsi d'après le diagramme p. 28, des recherches de M. G. Eiffel cité en Note ⁽¹⁾, ci-contre, on peut estimer p_2 approximativement à la valeur $p_2 \cong 1$ comme pour les plans minces.

soient les progrès futurs faits dans l'étude de la résistance de l'air de ces surfaces, on pourra toujours dans une première approximation caractériser R par les formules précédemment indiquées. Il suffira pour cela d'attribuer aux divers coefficients qui y figurent des valeurs numériques spécialement déterminées pour les intervalles considérés des variations de V et de i . C'est dans ce sens et dans ce sens seulement que nous comprendrons toutes les formules que nous avons citées relativement aux lois de la résistance de l'air et c'est seulement sous les réserves indiquées que nous en ferons usage. Nous pouvons dans ces conditions être certain d'embrasser les phénomènes étudiés au moins dans une première approximation.

Quoique nos connaissances des lois de la résistance de l'air pour les quelques cas particuliers dont nous venons de faire une brève revue soient encore, comme on a pu aisément le voir, fort incomplets et demandent à être précisées sur bien des points, principalement sur la valeur des différents coefficients qui y figurent, elles constituent pourtant ce que nous possédons de mieux connu dans le domaine de l'aérodynamique. Sur les lois de la résistance de l'air dans d'autres cas plus généraux de mouvement des surfaces sustentatrices employées en aviation, dont la connaissance nous est nécessaire pour poser le problème général du mouvement de l'aéroplane, nous ne possédons malheureusement presque aucune indication. Pour les élucider, nous ne pouvons donc recourir qu'à des méthodes plutôt divinatoires. Nous essaierons toutefois par quelques considérations simplistes de serrer la vérité d'aussi près que possible.

13. Lois de la résistance de l'air pour un plan mince animé simultanément d'une translation rectiligne et uniforme et d'un mouvement de rotation. — C'est couramment que les surfaces sustentatrices des aéroplanes ont à travailler dans de telles conditions. Par exemple quand un appareil en plein vol prend un mouvement de tangage (effectue des oscillations longitudinales), ses surfaces sustentatrices et ses empennages horizontaux sont, outre le mouvement de translation général de tout l'appareil, animés aussi d'un mouvement de rotation. Quoique la vitesse angulaire de cette rotation soit généralement faible, il importe d'examiner quelle modi-

fication cette rotation peut introduire dans les réactions de l'air.

Considérons un plan mince de contour rectangulaire animé d'une vitesse $\bar{V}$ de translation rectiligne et uniforme normal à un de ses côtés et animé, en outre, à un instant donné, d'une vitesse angulaire ω de rotation autour d'un axe qui partage le mouvement de translation du plan mince, et que nous considérerons d'abord contenu dans son plan et normal à sa vitesse.

Pour estimer, au moins dans une première approximation, la résistance de l'air que rencontre dans ce cas le plan mince, nous allons recourir à un raisonnement que nous savons être fort critiquable, mais qui, dans le cas présent, pourra nous donner tout de même une certaine indication sur le phénomène.

Nous allons partir du principe qui consiste à admettre une certaine loi de la résistance de l'air pour chaque élément d'une surface comme s'il était isolé et à considérer la résistance de l'air résultante de toute la surface comme la somme de la résistance de l'air de tous ses éléments. Cette hypothèse n'est rigoureusement valable que dans les cas où les réactions de l'air sur les divers éléments d'une surface sont de nature rigoureusement semblable ce qui, en réalité, n'a pratiquement presque jamais lieu. La diversité des conditions dans lesquelles se trouvent les divers éléments d'une surface, au point de vue des réactions de l'air, est déjà le résultat des positions relatives des divers éléments. Considérons, par exemple, le mouvement d'un plan mince incliné sur sa trajectoire dont la résistance de l'air peut être estimée par la formule.

$$(*) \quad R = K' A V^2 i.$$

Comme pour chaque élément de la surface du plan mince, V et i sont les mêmes, nous pouvons écrire cette formule sous la forme

$$(**) \quad R = \int K' V^2 i d\sigma = K' V^2 i \int d\sigma,$$

$d\sigma$ étant un élément de la surface du plan mince, frappé par le vent, et la somme étant étendue à tous les éléments du plan mince. Formellement, les deux formules (*) et (**) sont équivalentes, car $\int d\sigma = A$, physiquement parlant non, car nous

dernier; i l'angle d'attaque considéré petit; H la distance du milieu O du plan mince à l'axe C . Nous considérons ω comme petit ou, plus exactement parlant, ωr petit devant V , mais de l'ordre de Vi , r étant la distance d'un élément quelconque $d\sigma$ du mince à l'axe de rotation C . Si nous mettons la loi de la résistance de l'air (3) pour un plan mince sous la forme

$$R = K' AV. Vi = K' AVW,$$

ou $W = Vi$ est la composante normale au plan mince de la vitesse V , nous pouvons écrire que la résistance de l'air dR d'un élément $d\sigma$ de notre plan mince est égale à

$$dR = K' d\sigma V. W = K' d\sigma V(Vi + r\omega),$$

car $r\omega$ étant négligeable devant V , la vitesse de translation d'ensemble du plan mince ne sera presque pas modifiée du fait de la rotation ω , mais la composante normale Vi de cette vitesse sera augmentée de $r\omega$. En faisant la somme des résistances élémentaires de tous les éléments de la surface, nous obtenons pour la résistance résultante

$$(8) \quad R = K' AV^2 i + K' V \omega \int r d\sigma = K' AV^2 i + K' AV \omega H.$$

La résistance de l'air du plan mince se trouve ainsi, du fait de la rotation ω , accrue ou diminuée, suivant le signe de ω , d'une quantité $K' AV \omega H$. Quand ω est très petit, c'est-à-dire que ωH est même petit devant Vi , l'accroissement en grandeur de la résistance de l'air due à la rotation peut être négligé dans une première approximation.

Considérons maintenant le moment de cette résistance de l'air supplémentaire due à la rotation par rapport à l'axe de rotation. En désignant par C_a ce moment, nous avons :

$$(9) \quad C_a = K' V \omega \int r^2 d\sigma = K' V \omega A \left[H^2 + \frac{h^2}{3} \right].$$

moment qui comme on le voit aisément croît rapidement avec H distance du milieu du plan mince à l'axe de rotation. Remarquons que $\int r^2 d\sigma$ n'est autre chose que le moment d'inertie du plan

mince considéré comme homogène par rapport à l'axe de rotation C. Quand h est petit devant H , on peut, dans une première approximation, considérer

$$(10) \quad C_a \cong K' V \omega A H^2.$$

On conçoit facilement pourquoi nous avons recours à la considération du moment de la résistance supplémentaire due à la notation, car si cette dernière modifie peu R en grandeur, elle peut sensiblement modifier R en position, c'est-à-dire déplacer le centre de pression, ce qui a effectivement lieu.

Nous pouvons donc dire, en définitive, que quand un plan mince, en outre d'une translation rectiligne et uniforme, est aussi animé d'une rotation ω très petite autour d'un axe tel que C, du fait de cette rotation, la résistance de l'air est faiblement modifiée, mais le moment de la résistance de l'air supplémentaire due à la rotation ω par rapport à l'axe de rotation, a généralement une valeur appréciable. Ce moment C_a peut être écrit sous la forme

$$(11) \quad C_a = a V \omega$$

où a est une constante qui dépend des caractéristiques du plan mince, et qui, dans une première approximation, peut être considérée égale à $a \cong K' A H^2$ [en comparant à la formule (10)]. Ce moment C_a est donc dans une première approximation indépendant de l'angle d'attaque du plan mince, et il est *proportionnel à la première puissance de V et de ω* . Comme on le conçoit aisément C_a est de plus toujours de sens contraire à ω . Le moment C_a tend donc toujours à atténuer la rotation ω , c'est pourquoi on peut l'appeler *couple d'amortissement* de la rotation ω .

Ainsi donc, pour tenir compte des modifications introduites dans la résistance de l'air d'un plan mince, du fait d'une rotation ω , il suffit dans une première approximation d'ajouter à la résistance de l'air due à la translation rectiligne le couple d'amortissement C_a .

Comme on le conçoit aisément, une faible courbure du plan mince sera sans influence sur le phénomène d'amortissement d'une rotation que nous venons d'envisager; c'est pourquoi les résultats acquis peuvent sans erreur appréciable être étendus aussi aux surfaces incurvées employées en aviation.

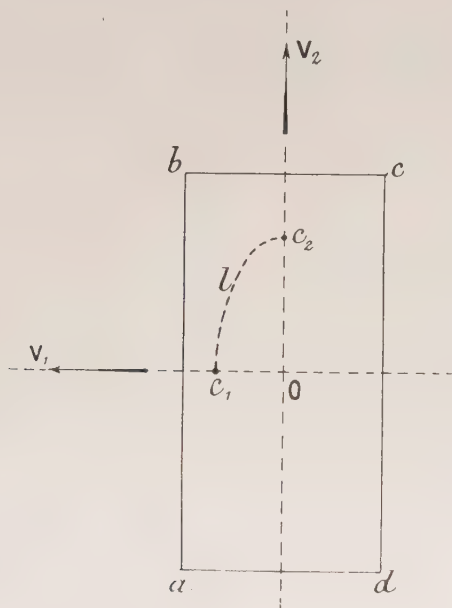
Quand l'axe de rotation n'est ni contenu dans le plan mince, ni normal à sa vitesse de translation rectiligne, on peut, si les écarts de cette orientation ne sont pas grands, dans une première approximation, généraliser de la manière suivante les résultats précédemment acquis. Projetons l'axe de rotation sur notre plan mince, et décomposons la vitesse angulaire de rotation en ses composantes suivant cette projection et la normale au plan mince. La composante de ω normale au plan mince aura pour effet de faire tourner le plan mince dans son plan et son action au point de vue des réactions de l'air peut évidemment être considérée comme négligeable avec une exactitude bien compatible avec l'approximation générale de toutes les considérations qui précèdent. L'autre composante de ω fera tourner le plan mince autour d'un axe contenu dans son plan et produira l'effet d'amortissement que nous avons envisagé.

Quoique notre étude du phénomène d'amortissement ne soit que bien approximative, il est hors de doute que l'élément essentiel qui se dégage de cette discussion et qui est l'apparition du couple d'amortissement C_a , indépendant de l'angle d'attaque et proportionnel à V et à ω , intervenant aussitôt que la surface sustentatrice prend un faible mouvement de rotation, est bien la caractéristique principale du phénomène. Nous verrons dans la suite quel rôle important le couple d'amortissement joue dans la question de la stabilité de l'aéroplane, et c'est pourquoi il est fort désirable que des expériences soient entreprises pour nous éclairer plus parfaitement sur cette importante question.

14. Lois de la résistance de l'air pour un plan mince dont le vitesse n'est pas parallèle à son plan de symétrie. — Considérons un plan mince de contour rectangulaire animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, et dont la vitesse a d'abord une orientation V_1 normale à l'un de ses côtés ab , par exemple (*fig. 2*). Pour un petit angle d'attaque, le centre de pression sera comme nous l'avons vu précédemment, situé vers le bord d'attaque dans une position telle que C_1 . Si pour la même valeur de l'angle d'attaque, la vitesse du plan mince prend une nouvelle orientation V_2 normale au côté bc , ce dernier étant bord

d'attaque, le centre de pression aura une autre position telle que C_2 . Pour une orientation intermédiaire de la vitesse du plan mince entre V_1 et V_2 , le centre de pression aura évidemment une position intermédiaire entre C_1 et C_2 . Si l'on considère le passage continu de la vitesse du plan mince de l'orientation V_1 à l'orientation V_2 ,

Fig. 2.



l'angle d'attaque restant invariable, le centre de pression décrira sur le plan mince $abcd$ une certaine courbe telle que C_1 / C_2 sur l'allure de laquelle nous ne possédons à l'heure actuelle aucun renseignement.

Considérons spécialement le cas où la vitesse de translation rectiligne et uniforme, fait seulement un petit angle avec un des plans de symétrie du plan mince (*fig. 3*). Soit AB la section du plan mince par son plan de symétrie ; V la vitesse du plan mince ; V_1 la projection de V sur le plan de symétrie du plan mince ; i l'angle d'attaque (angle de V et du plan mince) ; i_1 l'angle de V_1 et du plan mince ; ν l'angle de V et du plan de symétrie du plan mince, ν étant un petit angle (suffisamment petit pour

qu'on puisse sans erreur appréciable considérer $\text{Cos } \nu \cong 1$; $\sin \nu \cong \nu$). Comme on a

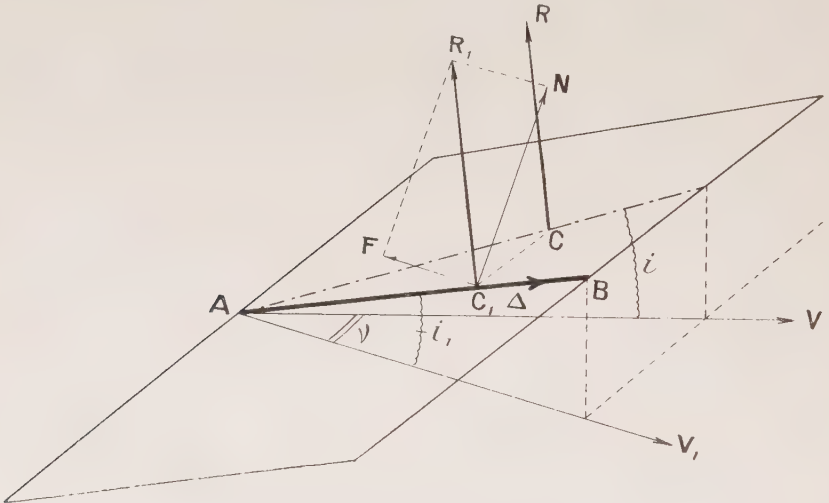
$$V_1 = V \cos \nu \quad \text{et} \quad \tan i = \tan i_1 \cos \nu$$

et que nous considérons i et ν comme de petits angles, nous avons

$$V_1 \cong V \quad \text{et} \quad i_1 \cong i.$$

Dans ces conditions, le centre de pression, c'est-à-dire le point d'intersection du plan mince et du vecteur résultant de la résistance de l'air, aura une certaine position C située en dehors de AB,

Fig. 3.



mais à faible distance de AB, ν étant petit, et la résistance de l'air sera un certain vecteur $\bar{R}$ qui, dans une première approximation, peut être considéré sensiblement normal au plan mince. Traçons CC_1 , parallèle au bord d'attaque du plan mince, et substituons $\bar{R}$ par une force égale $\bar{R}_1$ appliquée en C_1 et un couple $\Delta = \bar{R} \times CC_1$. L'axe du couple Δ est, dans une première approximation, dirigé suivant AB. L'ensemble de la force $\bar{R}_1$ et du couple Δ est complètement équivalent au point de vue de la dynamique du solide à $\bar{R}$. Quand ν est petit, R est évidemment en valeur absolue peu diffé-

rent de la résistance de l'air que rencontrerait le plan mince si V était situé dans son plan de symétrie. En ce qui concerne Δ , ce couple sera donc proportionnel à V^2 et à ν , $C_1 C$ pouvant évidemment, dans une première approximation, être considéré proportionnel à ν . Nous pouvons donc poser le couple Δ égal à

$$(12) \quad \Delta = m V^2 \nu,$$

en négligeant l'influence de la variation de l'angle d'attaque sur ce couple, et en désignant par m une certaine constante qui dépend des caractéristiques du plan mince. Remarquons enfin, vu que ν est considéré comme petit, que la position de C_1 différera peu de la position du centre de pression correspondant au même angle d'attaque, et V étant parallèle au plan de symétrie du plan mince.

Ainsi donc, quand la vitesse du plan mince déviara faiblement hors du plan de symétrie de ce dernier, nous admettrons, dans une première approximation, que la résistance de l'air peut être exprimée par une force $\overline{R}_1$, appliquée en C_1 comme si la vitesse du plan mince était située dans le plan de symétrie, et un couple de de renversement latéral de la forme $\Delta = m V^2 \nu$, dont l'axe est dirigé suivant AB.

Comme on le conçoit aisément, les résultats qui précèdent peuvent, dans une première approximation, être aussi étendus aux surfaces légèrement incurvées comme le sont celles qui sont employées en aviation.

On voit ainsi que l'effet principal produit par une faible déviation de la vitesse d'une surface sustentatrice hors de son plan de symétrie, se traduit par l'apparition d'un couple de renversement latéral.

Quoique cette manière d'envisager les choses ne soit évidemment que fort approximative, elle met toutefois en évidence, au moins qualitativement, le plus important facteur du phénomène.

Avec les quelques lois de la résistance de l'air, dont nous venons de faire une brève revue dans ce Chapitre, nous pouvons aborder dans toute sa généralité l'étude des forces agissantes sur un aéroplane. Nous nous sommes efforcés, dans la mesure du possible, de compléter les données empiriques que nous possédons actuellement

sur les lois de la résistance de l'air, afin de ne négliger dans cette étude aucun élément essentiel de la question ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ En toute rigueur on ne peut faire usage de toutes les formules établies dans ce Chapitre que quand la vitesse $\bar{V}$ du solide envisagé est devenue constante depuis un certain intervalle de temps, c'est-à-dire une fois le régime de translation rectiligne et uniforme établi. Mais, dans une première approximation, on peut employer ces formules quand la vitesse du solide envisagé est faiblement variable, c'est-à-dire quand l'accélération $\frac{dv}{dt}$ est relativement petite. En réalité, dans ce dernier cas, la résistance de l'air est, en général, fonction non seulement de V , mais aussi de $\frac{dv}{dt}$. Mais, jusqu'à présent, l'expérience ne nous a, pour ainsi dire, donné aucune indication sensible à ce sujet, et il est à prévoir que l'influence de l'accélération, pour de petites valeurs de cette dernière, doit être relativement faible. On peut donc négliger cette influence dans une première approximation parfaitement compatible avec l'approximation générale de nos connaissances aérodynamiques. Nous avons déjà implicitement fait usage de cette approximation dans le paragraphe 13.

⁽²⁾ Pour la rédaction de ce Chapitre, il a été consulté : en outre des Ouvrages de M. Paul Painlevé, cités en Note ⁽¹⁾, page 18, et des recherches de M. G. Eiffel, cités en Note ⁽¹⁾, page 26. — G. EIFFEL, *La résistance de l'air. Examen des formules et des expériences*, Paris, 1910. Dunod et Pinat, éditeurs. — R. SOREAU, *État actuel et avenir de l'aviation*. (Extrait des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France*. Bulletin de Juillet 1908). — A. RATEAU, *L'aérophile*, n° 12, 15 juin 1909. — A. RATEAU, *L'aérophile*, n° 15, 1^{er} août 1909. — A. RATEAU, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 148, n° 25, 1^{er} semestre, 21 juin 1909. S. FINSTERWALDER, *Aërodynamik*, Leipzig 1902. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Band IV. Teil. II n° 17. — F. W. LANCHESTER, *Aerodynamics*, London 1907. Archibald Constable et Co, éditeurs.

CHAPITRE II.

LES CARACTÉRISTIQUES FONDAMENTALES DE L'AÉROPLANE.

I. — L'AÉROPLANE

15. Tout aéroplane est essentiellement constitué par une voilure, un esquif et une série de dispositifs de stabilisation et de direction. La disposition générale de l'appareil est toujours telle que ce dernier possède un plan de symétrie parallèle à sa vitesse normale de vol. Nous allons rapidement examiner les principales propriétés de ces diverses parties de l'aéroplane au point de vue de leur résistance de l'air, et nous indiquerons les conditions auxquelles sera censé satisfaire l'appareil que nous allons soumettre à l'étude.

16. **La voilure.** — La voilure de l'aéroplane assure la sustentation de l'appareil, et elle est généralement constituée par une ou plusieurs surfaces incurvées. Quel que soit le nombre de ces surfaces, on peut toujours les remplacer au point de vue des réactions de l'air par un plan mince fictif équivalent à toute la voilure de l'appareil. Montrons brièvement comment cette réduction peut se faire.

Soit n le nombre des surfaces sustentatrices de la voilure d'un aéroplane. Supposons-les disposées de telle manière qu'on puisse, dans une première approximation, considérer que les réactions de l'air sur ces surfaces sont les mêmes que si chacune de ces surfaces se déplaçait isolément. Au point de vue de l'économie du vol, on a tout intérêt à réaliser cette dernière condition, c'est pourquoi, dans la pratique de l'aviation, on tâche de s'en rapprocher dans la mesure du possible. Soit V , la vitesse de translation rectiligne et uniforme de l'appareil, que nous considérons parallèle

au plan de symétrie de ce dernier, et soit N_q et F_q la poussée et la traînée de la $q^{\text{ième}}$ surface sustentatrice de la voilure. D'après ce que nous avons vu, page 22, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} N_q &= K_q A_q V^2 i_q, \\ F_q &= K_q A_q V^2 (r_q i_q^2 + s_q), \end{aligned}$$

toutes les quantités qui figurent dans ces formules ayant la même signification que page 22, et se rapportant à la $q^{\text{ième}}$ surface. La poussée N_1 et la traînée F_1 de toute la voilure de l'aéroplane ont alors pour valeur

$$(13\ a) \qquad N_1 = V^2 \sum K_q A_q i_q,$$

$$(13\ b) \qquad F_1 = V^2 \sum K_q A_q (r_q i_q^2 + s_q).$$

La somme Σ étant étendue à toutes les valeurs entières de q , depuis 1 jusqu'à n .

Soit π , un plan normal au plan de symétrie de tout l'appareil, et tel qu'il contienne la traînée F_1 , quand $N_1 = 0$. En général, pour une voilure donnée, plusieurs orientations semblables sont possibles. Pour définir le plan π , nous choisirons celle qui s'écarte le moins de l'orientation normale de l'appareil. Nous désignerons le plan π ainsi défini par plan fictif équivalent à toute la voilure, et nous lui attribuerons les propriétés fictives de posséder la même traînée F_1 et la même poussée N_1 que toute la voilure. Les dimensions du plan π , si l'on voulait lui en attribuer, sont tout à fait *ad libitum* (s'en rapporter à ce qui a été dit à propos du plan fictif équivalent à une surface incurvée, paragraphe 12). On peut, par exemple, attribuer à π les dimensions d'une aire qui embrasserait les projections de toutes les surfaces de la voilure sur ce plan.

Soit j_q , l'inclinaison du plan fictif de la $q^{\text{ième}}$ surface sur le plan π , angle que nous considérons comme positif quand le plan fictif de la surface considérée sera plus cabré que π , et soit i , l'angle de $\bar{V}$ et du plan π , que nous désignerons par *angle d'attaque* de toute la voilure. Avec ces notations, nous avons

$$i_q = i + j_q.$$

Substituons cette valeur de i_q dans (13 a), nous avons

$$\begin{aligned} N_1 &= V^2 \sum K_q A_q (i + j_q), \\ &= V^2 i \sum K_q A_q + V^2 \sum K_q A_q j_q. \end{aligned}$$

Or, comme par définition même de l'angle i pour $N_1 = 0$, on a $i = 0$, on doit donc avoir

$$(14) \quad \sum K_q A_q j_q = 0.$$

Par conséquent, N_1 peut toujours être mis sous la forme

$$(15) \quad N_1 = V^2 i \sum K_q A_q = K A V^2 i,$$

en posant

$$(15') \quad K A = \sum K_q A_q.$$

La poussée de toute la voilure peut donc toujours être mise sous une forme tout à fait semblable à la poussée d'une seule surface sustentatrice.

Quand toutes les surfaces sustentatrices ont même qualité au point de vue des lois de la résistance de l'air, c'est-à-dire quand tous les K_q sont égaux, on voit aisément que

$$(16) \quad K = K_q \quad \text{et} \quad A = \sum A_q.$$

Considérons maintenant la traînée F_1 de toute la voilure. En introduisant dans (13 b) $i_q = i + j_q$, on a

$$\begin{aligned} F_1 &= V^2 \sum K_q A_q [r_q (i + j_q)^2 + s_q], \\ F_1 &= V^2 i^2 \sum K_q A_q r_q + V^2 \sum K_q A_q r_q j_q^2 + 2 V^2 i \sum K_q A_q r_q j_q - V^2 \sum K_q A_q s_q, \\ (17) \quad F_1 &= V^2 \left[i^2 \sum K_q A_q r_q + 2 i \sum K_q A_q r_q j_q + \sum K_q A_q r_q j_q^2 + \sum K_q A_q s_q \right]. \end{aligned}$$

On voit ainsi que F_1 dépend, en général, tout aussi bien de i que de i^2 . F_1 peut toutefois dans certains cas se mettre sous la forme

$$(18) \quad F_1 = K A V^2 (r i^2 + s).$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$(19) \quad \sum K_q A_q r_q j_q = 0.$$

Cette dernière relation a toujours lieu, en vertu de la relation (14), quand tous les r_q sont égaux. Quand la relation (19) est remplie, en comparant les équations (17) et (18), on voit que

$$K A r = \sum K_q A_q r_q,$$

d'où, eu égard à (15'), on a

$$(20) \quad r = \frac{\sum K_q A_q r_q}{\sum K_q A_q},$$

et que

$$K A s = \sum K_q A_q r_q j_q^2 + \sum K_q A_q s_q,$$

d'où

$$(21) \quad s = \frac{\sum K_q A_q r_q j_q^2}{\sum K_q A_q} + \frac{\sum K_q A_q s_q}{\sum K_q A_q}.$$

Quand tous les j_q sont égaux, alors s se réduit à

$$(21') \quad s = \frac{\sum K_q A_q s_q}{\sum K_q A_q}.$$

Il est donc avantageux, au point de vue d'une moindre résistance à l'avancement de la voilure de l'aéroplane, que toutes les surfaces qui la composent soient parallèles entre elles.

Considérons maintenant spécialement le cas où toutes les surfaces de la voilure sont parallèles et semblables. Alors F_4 peut toujours se mettre sous la forme (18), et on a de plus

$$(22) \quad r = r_q \quad \text{et} \quad s = s_q,$$

car tous les j_q , r_q et s_q sont alors égaux. Dans ce dernier cas, la résistance de l'air résultante R de toute la voilure est dans une première approximation normale, au plan π , comme compo-

sante de forces sensiblement normales à des plans parallèles à π , et quand, de plus, les surfaces constituant la voilure ont même largeur, la loi du déplacement du point d'intersection de R et de π , que nous appellerons *centre de pression* de toute la voilure, est identique à la loi du déplacement du centre de pression de chacune des surfaces de la voilure. De même, que pour une surface isolée, nous considérerons la position limite C_0 du point d'intersection de R et de π pour $i = 0$, et les déplacements de ce centre de pression résultant seront comptés à partir de ce point C_0 .

C'est ce dernier cas d'une voilure composée de surfaces semblables et parallèles, qu'on rencontre presque uniquement dans la pratique, et c'est ce cas seulement que nous aurons en vue dans toute cette étude. Pour ce cas, la traînée et la poussée de toute la voilure s'expriment par les formules (18) et (15) et les relations (16) et (22) ont toujours lieu.

17. L'esquif. — Par esquif d'un aéroplane, nous entendons l'ensemble de la charpente de l'appareil qui assure sa rigidité et fournit l'emplacement nécessaire aux aviateurs, le châssis d'atterrissage et l'appareil moteur-propulseur. Il suffit d'embrasser d'un coup d'œil l'ensemble des formes de l'esquif pour se rendre compte qu'au point de vue de la résistance de l'air, l'esquif présente presque uniquement une résistance à l'avancement (dans laquelle nous ferons aussi entrer la résistance de l'air des aviateurs).

Pour de petites variations de la vitesse de l'appareil et de l'angle d'attaque de sa voilure on pourra, dans une première approximation, admettre que la traînée de l'esquif, aviateurs compris, mais les hélices de l'appareil étant exclues, est de la forme kV^2 ou k est un certain coefficient caractéristique de l'esquif au point de vue de sa résistance de l'air. On peut de plus admettre, toujours dans le même ordre d'approximation, que quand la vitesse de l'appareil subit de petites variations en direction, la résistance kV^2 passe sensiblement toujours par le même point de l'esquif. Cette dernière condition ne constitue pas une aussi grande restriction à la généralité des choses comme on pourrait le croire de prime abord. On conçoit aisément vu la complexité des formes de l'esquif, que sa résistance de l'air doit varier en position suivant une loi

assez complexe, mais on peut toujours se représenter une surface, enveloppe de toutes les positions successives de la résistance de l'air de l'esquif, que l'on appelle généralement *surface métacentrique* et à laquelle la résistance de l'esquif est toujours tangente. Si les variations d'orientation de l'appareil ne sont pas grandes, la résistance de l'air de l'esquif ne balayera qu'une faible portion de la surface métacentrique que l'on peut, dans une première approximation, considérer comme se réduisant à un point, le *métacentre de l'esquif*. Cette hypothèse revient au fond à admettre que l'esquif au point de vue de la résistance de l'air, pour de petites variations d'orientation de l'appareil, se comporte comme une sphère dont le centre est le métacentre de l'esquif. Nous admettrons encore que le centre de gravité de tout l'aéroplane dont nous allons faire l'étude est très sensiblement confondu avec le métacentre de l'esquif. On conçoit aisément que le métacentre de l'esquif soit sensiblement situé vers l'endroit où sont concentrées le plus de masses de l'esquif, or comme la masse de la voilure de l'appareil est beaucoup plus faible que celle de l'esquif, c'est aussi au voisinage de ce même point de concentration des masses que sera situé le centre de gravité de tout l'appareil. Cette dernière hypothèse n'est donc l'expression dans une première approximation que de la probabilité des choses.

En ce qui concerne la poussée des hélices de l'appareil nous ne pouvons, sans nous écarter par trop des cadres de cette étude, en faire même une brève analyse. En effet, pour pouvoir même d'une manière sommaire, se rendre compte de quels facteurs dépend la poussée des hélices, il faut non seulement entrer dans la considération des propriétés des hélices aériennes, mais encore étudier les moteurs à explosion employés en aviation et auxquels le fonctionnement des hélices est intimement lié, ce qui nous entraînerait trop loin hors de notre sujet principal. C'est pourquoi nous nous permettons de renvoyer pour cette question aux travaux d'une si grande portée critique de M. Paul Painlevé et auxquels j'emprunte cette conclusion fondamentale : *dans une première approximation de la poussée d'une hélice aérienne mue par un moteur à explosion peut être considérée comme constante : indépendamment de la vitesse de l'appareil dont elle assure la propulsion, tant qu'on ne touche pas aux circonstances de la carburation*

du moteur et aux transmissions qui relient l'hélice au moteur ⁽¹⁾.

Ceci sera d'autant plus exact que nous n'envisagerons que des variations de la vitesse de l'aéroplane comprises dans de petits intervalles. Nous désignerons la poussée résultante des hélices de notre aéroplane par Φ . Cette poussée Φ est nécessairement située dans le plan de symétrie de tout l'appareil, mais elle peut ne pas passer par le centre de gravité de ce dernier. Il est tout naturel d'orienter la poussée Φ de telle manière, que dans le vol normal de l'appareil, elle soit parallèle à la vitesse normale de vol.

Nous supposerons enfin que le couple de réactions des hélices est compensé par tel ou autre moyen, et que l'effet gyroscopique des hélices est ou bien négligeable ou bien équilibré par la disposition même des hélices.

Toutes les conditions et restrictions que nous imposons à notre appareil d'étude ne nous sont dictées que par le désir d'éviter, par la recherche d'une trop grande généralité la complication outre mesure du problème de l'aéroplane, sans cela déjà fort complexe, comme on aura l'occasion de s'en convaincre dans la suite de cette étude. Toutes ces conditions et restrictions sont du reste toutes pratiquement réalisables, et la plupart des aéroplanes actuellement existant s'en rapprochent plus ou moins. L'aéroplane que nous envisageons est donc bien dans une première approximation le prototype de l'appareil réel, dont il embrasse toutes les caractéristiques essentielles.

18. Les dispositifs de direction et de stabilisation de l'aéroplane. — La direction des aéroplanes est généralement assurée par des gouvernails de deux espèces différentes : le *gouvernail de*

(1) Cette constance de la poussée des hélices résulte du fait que la poussée d'une hélice est proportionnelle au couple moteur, et que ce dernier est dans une première approximation indépendant pour un moteur à explosion de la vitesse de rotation de ce dernier tant que la carburation reste invariable, car dans ces conditions comme on le conçoit aisément, le travail moteur par cycle complet est sensiblement le même. En réalité, comme l'a indiqué M. Paul Painlevé, le couple moteur d'un moteur à explosion décroît quand la vitesse du moteur croît, en sorte que la poussée d'une hélice décroît un peu quand croît la vitesse de l'appareil.

Pour plus de détails consulter les Ouvrages de M. Paul Painlevé cités en Note ⁽¹⁾, page 18.

profondeur quelquefois aussi appelé *gouvernail horizontal* qui peut être placé soit à l'avant, soit à l'arrière de l'appareil et qui est essentiellement constitué par un plan mince de contour sensiblement rectangulaire, mobile autour d'un axe normal au plan de symétrie de l'appareil. A l'aide du gouvernail horizontal, on peut modifier l'inclinaison de la trajectoire de l'appareil ; le *gouvernail vertical* généralement placé à l'arrière de l'appareil et qui est le plus généralement constitué par un plan mince mobile autour d'un axe contenu dans le plan de symétrie de l'appareil et qui est vertical pour l'orientation normale de l'aéroplane. Ce gouvernail sert à faire virer l'appareil. Dans leur orientation moyenne ces gouvernails ne fournissent qu'une résistance à l'avancement, dont nous tiendrons compte par une valeur appropriée du coefficient k de la résistance de l'air de l'esquif. Dans l'étude que nous allons aborder nous considérerons d'abord que ces gouvernails servent uniquement à la direction de l'appareil et par conséquent nous supposerons qu'ils sont bloqués tant qu'on ne change pas le régime de marche de l'appareil.

Les dispositifs stabilisateurs de l'aéroplane, nous les diviserons en deux espèces : les dispositifs immobiles, c'est-à-dire ceux qui sont invariablement liés à l'appareil et les dispositifs mobiles. Parmi ces derniers nous citerons les divers types d'ailerons et le gauchissement de la voilure de l'appareil qui ont pour but d'assurer la stabilité latérale de l'appareil. Le gouvernail vertical peut aussi servir pour maintenir la stabilité latérale. Enfin le gouvernail de profondeur qui outre son rôle de direction est aussi un moyen très puissant pour combattre le tangage de l'aéroplane.

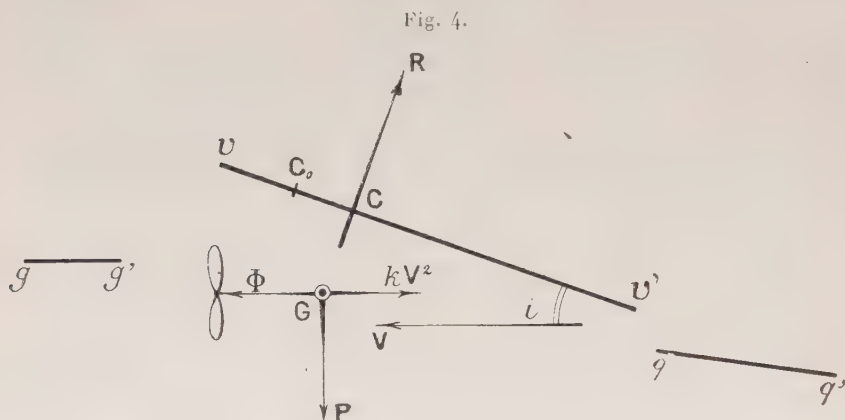
Dans cette étude nous étudierons principalement les propriétés de l'aéroplane considéré comme un système invariable, et c'est pourquoi nous supposerons d'abord que les dispositifs stabilisateurs mobiles dont est muni l'appareil sont bloqués et que par conséquent leur présence ne se traduit que par un supplément de la résistance à l'avancement de l'appareil.

Les dispositifs de stabilisation immobiles sont constitués par les *empennages horizontaux* qui peuvent être placés soit à l'avant, soit à l'arrière de l'appareil, et dans ce dernier cas on les désigne généralement par *queue* de l'aéroplane, et les *quilles* ou *cloisons verticales*. Les empennages horizontaux sont simplement formés

par des surfaces normales au plan de symétrie de l'appareil qui peuvent être différemment inclinées et qui sont plus ou moins éloignées de la voilure principale de l'appareil. Ainsi le gouvernail horizontal quand il est bloqué joue le rôle d'un empennage horizontal. Les empennages horizontaux servent à améliorer la stabilité longitudinale de l'aéroplane. Les quilles ou cloisons verticales sont constitués par des surfaces parallèles au plan de symétrie de l'appareil et qui peuvent être différemment disposées. Trois dispositions principales des quilles sont à distinguer : 1° les centres de pression des quilles sont disposés à droite et à gauche du centre de gravité de l'appareil ; 2° les centres de pression sont disposés en avant ou en arrière du centre de gravité ; 3° les centres de pression sont disposés au-dessus ou au-dessous du centre de gravité. La distribution générale des quilles est toujours symétrique ainsi que l'est du reste tout l'aéroplane que nous considérons. Quand le mouvement de l'appareil s'effectue parallèlement à son plan de symétrie, les quilles ne fournissent qu'une résistance à l'avancement et leur action n'intervient que quand l'appareil commence à déraper c'est-à-dire quand sa vitesse fait un certain angle avec son plan de symétrie. L'action des quilles intéresse la giration et la stabilité latérale de l'aéroplane. Les dispositifs stabilisateurs immobiles que nous venons d'énumérer embrassent pour ainsi dire tous les cas possibles. A tout dispositif stabilisateur invariablement lié à l'appareil on peut faire correspondre un système de quilles et d'empennages horizontaux qui lui est complètement équivalent au point de vue des réactions de l'air et par cela même équivalent à son action stabilisatrice. Ainsi par exemple les voilures en dièdre sont équivalentes à une voilure droite munie de cloisons verticales. L'examen du rôle des empennages horizontaux et des quilles constituera le premier objet de notre étude.

19. L'aéroplane d'étude. — Considérons la section de l'aéroplane tel que nous l'avons précédemment décrit par son plan de symétrie confondu avec le plan du dessin. Schématiquement l'appareil nous apparaîtra comme représenté sur la figure 4. vv' est le plan fictif équivalent à toute la voilure de l'appareil ; R est la résistance de l'air résultante de la voilure, normale dans une première approximation à vv' ; C est le centre de pression, C_0 la position

limite de C pour $i=0$; G le centre de gravité de tout l'appareil confondu dans une première approximation avec le métacentre de l'esquif; Φ la poussée résultante des hélices; P le poids de tout



l'appareil; kV^2 la résistance de l'air de l'esquif, aviateurs compris mais hélices exclues; qq' l'empennage horizontal que nous supposons dans ce dessin disposé à l'arrière, c'est-à-dire formant une queue; gg' le gouvernail horizontal supposé disposé à l'avant. L'appareil possède en outre un gouvernail vertical et peut avoir des quilles non représentées sur le dessin.

Nous commencerons d'abord par n'envisager que le mouvement de l'aéroplane parallèle à son plan de symétrie considéré vertical.

20. Poussée de tout l'appareil. — La poussée résultante d'un aéroplane est fournie par sa voilure et ses empennages horizontaux, la poussée de l'esquif étant comme nous l'avons vu complètement négligeable. Les empennages horizontaux sont toujours de surface beaucoup moindre que la voilure principale de l'appareil et de plus sont généralement disposés de telle manière qu'ils attaquent l'air sous une très faible incidence. Ainsi c'est une règle fondamentale de construction des aéroplanes actuels de disposer leur queue sous un angle d'attaque beaucoup moindre que celui de la voilure principale, souvent même on donne à la queue une incidence nulle. Nous verrons dans la suite la raison d'être d'une telle disposition de la queue qui est nécessaire pour que son

action soit efficace. Eu égard à ces conditions la poussée des empennages horizontaux est toujours très faible en comparaison de la poussée de la voilure principale et peut donc dans une première approximation être négligée. La poussée de tout l'appareil se réduit donc à la poussée de sa voilure principale et peut d'après ce que nous avons vu page 47 être exprimée par la formule

$$(23) \quad N = KAV^2 i = \lambda V^2 i$$

en posant

$$KA = \lambda.$$

21. La traînée de tout l'appareil. -- Toutes les parties de l'appareil donnent une résistance à l'avancement. D'abord la voilure dont la traînée peut être, comme nous l'avons vu page 47, (sous la réserve de certaines conditions que nous supposons remplies), exprimée par la formule

$$(18) \quad F_v = KAV^2 (ri^2 + s) = \lambda V^2 (ri^2 + s).$$

La traînée de l'esquif peut, dans une première approximation, être estimée comme nous l'avons indiqué par la formule $F_e = k V^2$ où k est un coefficient qui dépend de la constitution de l'esquif. Dans le mouvement de l'appareil parallèlement à son plan de symétrie, les quilles et le gouvernail vertical donnent uniquement une résistance à l'avancement dont on peut tenir compte par une augmentation appropriée du coefficient k de la résistance de l'air de l'esquif. En définitive la traînée de tout l'appareil aura dans une première approximation la valeur

$$\begin{aligned} F &= F_v + F_e = \lambda V^2 (ri^2 + s) + k V^2, \\ &= \lambda V^2 \left(ri^2 + s + \frac{k}{\lambda} \right), \\ (24) \quad F &= \lambda V^2 (ri^2 + \sigma) \end{aligned}$$

en posant

$$\sigma = s + \frac{k}{\lambda}.$$

Remarquons que généralement s est très petit par rapport à $\frac{k}{\lambda}$ et que par conséquent σ dépend essentiellement de la résistance à l'avancement de l'esquif. Par contre r ne dépend, dans une première approximation que de la traînée de la voilure.

22. Notion de couple central. — Le mouvement de l'aéroplane comme le mouvement de tout solide libre est complètement déterminé par les deux théorèmes fondamentaux de la dynamique du solide : le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème des moments cinétiques, relatifs au centre de gravité (théorème des moments de quantité de mouvement). L'application de ces deux théorèmes exige la connaissance, non seulement de la grandeur des forces qui sollicitent l'aéroplane, mais aussi de leur moment par rapport au centre de gravité de l'appareil. M. Paul Painlevé a désigné ce moment dans le cas de l'aéroplane par *couple central*. Comme pour l'aéroplane que nous envisageons la résistance de l'esquif est supposée passer par le centre de gravité de tout l'appareil, le couple central se réduit à la somme des moments, des réactions de l'air sur la voilure de l'appareil et de la poussée résultante des hélices. Nous excluons toutefois de la valeur du couple central le moment des réactions de l'air supplémentaires qui interviennent quand l'appareil en outre de son mouvement de translation prend aussi un mouvement d'oscillation, c'est-à-dire le couple d'amortissement dont nous tiendrons compte séparément. Quand l'aéroplane est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme le couple central est nécessairement nul. Ceci n'a lieu que pour une orientation définie de l'appareil. Quand l'appareil est écarté de cette orientation le couple central intervient et fait effectuer à l'appareil certaines oscillations. Le couple central est donc une grandeur caractéristique de la plus haute importance dans l'étude du mouvement de l'aéroplane. C'est pourquoi il est nécessaire d'en faire la plus minutieuse étude.

Si l'on modifie par tel ou tel autre moyen les réactions de l'air sur l'appareil, le couple central sera modifié. Ceci aura lieu par exemple quand on manœvrera le gouvernail de profondeur. Si l'on modifie l'inclinaison de ce gouvernail, l'appareil ne pourra pas garder son orientation primitive car les nouvelles réactions de l'air introduites nous donneront un certain moment par rapport au centre de gravité de l'appareil et pour que le mouvement de translation de l'appareil puisse se continuer, il faudra que l'appareil prenne une nouvelle orientation pour laquelle le couple central soit de nouveau nul. Ainsi donc à l'aide du gouvernail horizontal on peut faire varier l'orientation de l'aéroplane ou plus exactement

son angle d'attaque puisque les réactions de l'air ne dépendent que de ce dernier. Nous reviendrons dans la suite plus en détails sur la manœuvre du gouvernail horizontal mais, pour le moment, nous retiendrons ce fait, qu'à l'aide du gouvernail horizontal on peut modifier le couple central de l'appareil et par cela même l'angle d'attaque de ce dernier.

Avant de passer à l'étude du couple central nous croyons nécessaire d'examiner au moins brièvement le mouvement de régime de l'aéroplane, on pourra alors plus aisément et plus complètement saisir toute la portée de cette étude. L'étude du mouvement de régime de l'aéroplane qui va suivre est, à quelques détails d'exposé près, presque entièrement empruntée aux travaux de M. Paul Painlevé. Quoique cette question du mouvement de régime de l'aéroplane soit de la plus grande importance pour la théorie de l'aéroplane, nous ne la développerons que dans la mesure qui nous sera nécessaire.

II. LES RÉGIMES DE TRANSLATION RECTILIGNE DE L'AÉROPLANE.

23. Considérons un aéroplane tel que nous l'avons schématiquement représenté figure 4, p. 54. Envisageons le mouvement de l'appareil parallèlement à son plan de symétrie considéré vertical. *Nous dirons pour un aéroplane en plein vol qu'un régime s'est établi quand le mouvement de l'appareil s'effectuera avec une vitesse constante en grandeur et direction.* D'après les théorèmes fondamentaux de la dynamique du solide nous pouvons dire que, pour que le régime de translation rectiligne et uniforme soit atteint, il faut et il suffit que la résultante de toutes les faces agissantes sur l'aéroplane soit nulle et que le moment de cette dernière, par rapport au centre de gravité de tout l'appareil c'est-à-dire le couple central soit aussi nul⁽¹⁾.

(¹) En toute rigueur ces théorèmes supposent que le mouvement de l'aéroplane est rapporté au système d'axes absolus. (Par axes absolus nous entendons uniquement le système d'axes pour lequel le principe de l'inertie est valable dans toute sa généralité.) Mais nous admettons pour le mouvement de régime de l'aéroplane que ces théorèmes sont valables pour un système d'axes invariablement lié à la terre. C'est ce que l'on admet généralement dans la plupart des applications de la dynamique du solide. L'erreur ainsi commise est à quelques rares exceptions près, pratiquement tout à fait inestimable.

Les forces agissantes sur l'aéroplane sont :

La poussée de tout l'appareil (*voir* p. 55)

$$N = \lambda V^2 i.$$

La traînée de tout l'appareil (*voir* p. 55)

$$F = \lambda V^2 (ri^2 + \sigma).$$

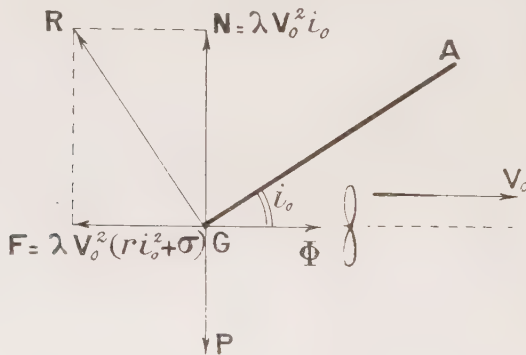
La poussée résultante Φ des hélices, que nous considérons comme constante (*voir* p. 50), la carburation du moteur étant laissée invariable, ainsi que les transmissions entre le moteur et les hélices.

Le poids P de tout l'appareil.

Remarquons que dans l'étude du mouvement de l'aéroplane, la poussée archimédienne est tout à fait négligeable, car le poids du volume d'air déplacé par l'appareil est tout à fait insignifiant devant le poids de tout l'appareil.

24. Le régime horizontal en air calme. — Soit en air calme, notre aéroplane animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme dont la vitesse est horizontale.

Fig. 5.



De la condition que le couple central est nul, une fois le régime établi, nous obtenons la valeur de l'angle d'attaque de régime de l'appareil. Par une orientation appropriée du gouvernail horizontal nous pouvons toujours donner à l'angle d'attaque la valeur que nous jugeons la plus convenable.

Du fait que la somme de toutes les forces agissantes sur l'appareil est nulle, nous obtenons, en projetant ces forces sur les directions horizontale et verticale (voir *fig. 5*)

$$(25 a) \quad P = \lambda V_0^2 i_0,$$

$$(25 b) \quad \Phi_0 = \lambda V_0^2 (r i_0^2 + \pi),$$

d'où l'on a directement

$$(25 c) \quad \frac{\Phi_0}{P} = r i_0 + \frac{\pi}{i_0},$$

en supposant que l'appareil est construit de telle manière que Φ_0 est parallèle à V_0 quand le régime horizontal est atteint et en désignant par Φ_0 , V_0 et i_0 les valeurs de la poussée résultante des hélices, de la vitesse et de l'angle d'attaque de l'appareil correspondant au régime horizontal.

Si dans l'équation

$$(25 d) \quad \frac{\Phi}{P} = r i + \frac{\pi}{i}$$

on interprète $\frac{\Phi}{P}$ comme abscisse et i comme ordonnée, elle représentera une hyperbole dont l'une des asymptotes est l'axe des Y et l'autre très sensiblement la bissectrice de l'angle XOY, car $r \cong 1$ (voir p. 33). La partie à considérer de cette hyperbole a été représentée sur la figure 6. Nous appellerons avec M. P. Painlevé, cette hyperbole, l'hyperbole de Penaud, pour rendre hommage à la mémoire du savant mathématicien français, dont les travaux d'aviation n'ont pas toujours été estimés à leur juste valeur, mais qui pourtant a le premier étudié le mouvement de régime de l'aéroplane.

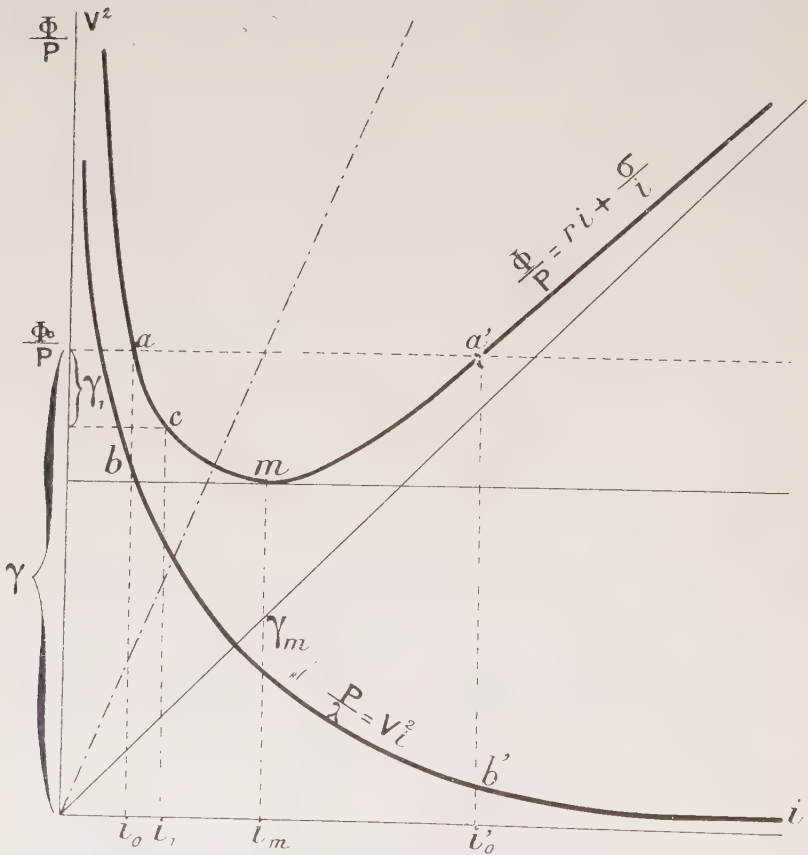
Pour $\frac{\Phi}{P} = \frac{\Phi_0}{P}$ il correspond, sur l'hyperbole de Penaud, deux points a et a' qui sont les deux points représentatifs des deux régimes horizontaux possibles pour une même poussée Φ_0 des hélices. Les abscisses de ces points sont les angles d'attaque de ces régimes et leur ordonnée commune est proportionnelle à Φ_0 car P est constant, du moins sensiblement, pendant un certain intervalle de temps, durant lequel le poids de combustible consommé par le moteur peut être négligé, en comparaison du poids

de tout l'appareil. A l'hyperbole de Penaud nous adjoignons l'hyperbole définie par l'équation

$$(26) \quad \frac{P}{\lambda} = V^2 i$$

en considérant toujours i comme abscisse mais V^2 comme ordonnée.

Fig. 6.

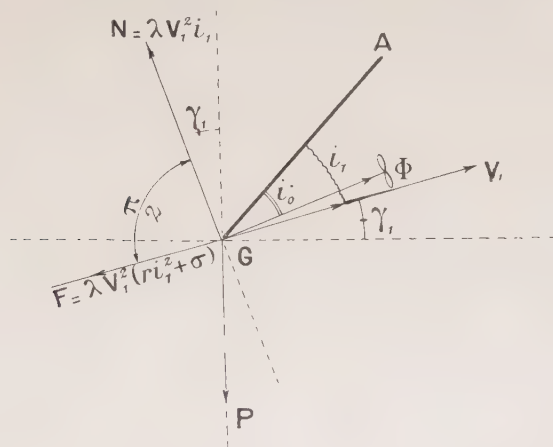


Cette dernière hyperbole a les axes de coordonnées pour asymptotes. Les ordonnées des points b et b' d'intersection des ordonnées des points a et a' avec cette seconde hyperbole sont respectivement égales aux carrés des deux vitesses des deux régimes horizontaux possibles.

M. Paul Painlevé ⁽¹⁾ a montré que des deux régimes horizontaux possibles un seul est stable et pratiquement réalisable et il l'a désigné par *régime normal*. C'est celui dont l'angle d'attaque est le plus petit (dont le point *a* est le point représentatif sur la figure 6). Ce régime normal a d'ailleurs le grand avantage d'avoir une plus grande vitesse pour une même poussée des hélices, comparativement au second régime possible. Quand, dans la suite, nous parlerons de régime horizontal, c'est le régime normal que nous aurons uniquement en vue, et c'est à lui que se rapporteront toujours les quantités que nous avons désignées par V_o et i_o .

25. Le régime de montée ou de descente en air calme. — Envisageons la trajectoire rectiligne de l'appareil inclinée sur

Fig. 7.



l'horizon d'un angle γ_1 , angle que nous considérerons comme positif quand la trajectoire est ascendante et négatif dans le cas contraire. Les équations caractéristiques du régime sont dans ce cas (voir fig. 7)

$$\begin{aligned} (27 a) \quad & P = \lambda V_1^2 i_1, \\ (27 b) \quad & \Phi - P \gamma_1 = \lambda V_1^2 (r i_1^2 + \sigma) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Voir les Ouvrages de M. Paul Painlevé cités en Note ⁽¹⁾ page 18 et particulièrement, *Étude sur le régime normal d'un aéroplane*. (La Technique aéronautique, n° 1, 1^{er} janvier 1910).

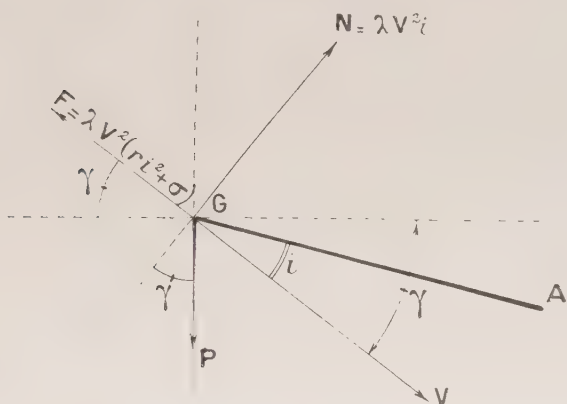
en considérant γ_1 comme petit et en négligeant l'inclinaison de Φ sur la vitesse de l'appareil. Ces deux équations nous donnent directement

$$(27 c) \quad \frac{\Phi - P\gamma_1}{P} = \frac{\Phi}{P} - \gamma_1 = r i_1 + \frac{\sigma}{i_1}.$$

De même que précédemment pour le régime horizontal, pour une même valeur de Φ deux régimes sont possibles, mais un seul stable, celui auquel correspond le plus petit angle d'attaque, le seul que nous considérerons dans la suite et auquel se rapportent les quantités V_1 et i_1 . L'équation nous montre que pour $\Phi = \Phi_o$, c'est-à-dire sans modification de la valeur de la poussée des hélices qui correspond au régime horizontal, on peut faire monter ou descendre l'appareil sous différentes inclinaisons. Il suffit pour cela de faire varier l'angle d'attaque, ce qui peut être atteint par la manœuvre du gouvernail horizontal. Si l'on s'en rapporte à l'hyperbole de Penaud, de la figure 6, pour $\Phi = \Phi_o$ à chaque régime stable ascendant ou descendant correspond un point représentatif et cette figure nous donne directement pour chaque valeur de i_1 la valeur correspondante de γ_1 ou inversement. Les points représentatifs des régimes ascendants (tel que c par exemple) sont situés au-dessous du point a , les points représentatifs des régimes descendants au-dessus de ce point. Le point m de l'hyperbole de Penaud, dont la tangente est parallèle à l'axe des X , sépare tous les régimes stables, situés à droite de m , des régimes instables, situés à gauche. Le point m , lui-même, est le point représentatif du régime horizontal, pour lequel la poussée des hélices est minima. La pente maximum de la trajectoire ascendante de l'appareil qu'on peut réaliser pour $\Phi = \Phi_o$ est donnée par la différence entre les ordonnées du point a et du point m . Si l'on envisage le régime horizontal de puissance minima, dépensée pour le vol de l'appareil, on trouve que son point représentatif est situé à droite de m et que, par conséquent, ce régime est pratiquement irréalisable. Si l'on fait varier la valeur de la poussée Φ des hélices de l'appareil, on peut, pour chaque valeur de Φ , réaliser un régime horizontal et toute une série de régimes ascendants et descendants. A mesure que Φ croît, la vitesse du régime horizontal correspondant augmente et l'angle d'attaque diminue.

26. Le régime de chute planée en air calme. — Supposons que nous coupons l'allumage du moteur de notre appareil, Φ s'annule. L'appareil se met à descendre en chute planée. Examinons les divers régimes possibles de planement. Soit γ_1 l'inclinaison de la trajectoire sur l'horizon. Projets les forces agissantes sur l'appareil, sur la vitesse $\bar{V}$ de régime de chute planée

Fig. 8.



de l'appareil et sur la normale à $\bar{V}$. On obtient pour γ_1 considéré comme petit (voir fig. 8)

$$(28 a) \quad P \cos \gamma_1 \cong P = \lambda V^2 i,$$

$$(28 b) \quad P \sin \gamma_1 \cong P \gamma_1 = \lambda V^2 (r i^2 + \sigma),$$

d'où l'on a directement

$$(28 c) \quad \tan \gamma_1 \cong \gamma_1 = r i + \frac{\sigma}{i}.$$

Si l'on s'en rapporte à l'hyperbole de Penaud, de la figure 6, en considérant ses ordonnées égales à γ_1 , on voit aisément qu'à chaque valeur i de l'angle d'attaque inférieur à i_m (les régimes situés à droite du point m sont, de même que précédemment, instables et pratiquement irréalisables et nous ne les considérons pas) qu'on peut obtenir par une orientation déterminée du gouvernail horizontal, il correspond une pente γ_1 déterminée de la

trajectoire de planement, donnée par l'ordonnée du point de cette hyperbole dont l'abscisse est égale à i . En manœuvrant le gouvernail horizontal on peut donc descendre en chute planée sous diverses inclinaisons sur l'horizon. L'angle minimum de planement est donné par l'ordonnée γ_m du point m qui a pour valeur, comme il est bien aisé de s'en convaincre en cherchant le minimum de l'expression (28c) $\gamma_m = 2ri_m = 2r\sqrt{\frac{\sigma}{r}}$, i_m désignant l'angle d'attaque qui correspond à l'angle de chute planée minimum. L'hyperbole de Penaud, construite pour un appareil déterminé, ce qui exige seulement la connaissance des coefficients r et σ , nous renseigne de suite sur les qualités de planement de l'appareil considéré. On voit aussi aisément qu'entre la pente γ_1 de la chute planée et la poussée Φ des hélices, dans le régime horizontal, ayant même angle d'attaque, c'est-à-dire pour la même orientation du gouvernail horizontal, il existe la relation $\frac{\Phi}{P} = \gamma_1$, ou bien $\Phi = P\gamma_1$. La connaissance de l'angle de chute planée d'un appareil nous donne directement la valeur de la poussée des hélices nécessaire pour réaliser, avec l'appareil considéré, un régime horizontal ayant même angle d'attaque. Φ sera d'autant plus petit que γ_1 sera petit. Un appareil sera donc d'autant plus économique, au point de vue de l'énergie dépensée pour le vol, qu'il sera meilleur planeur.

27. Les régimes horizontaux par vent régulier. — Considérons un aéroplane volant par un vent régulier. Soit $\bar{v}$ la vitesse du vent par rapport au sol et α son inclinaison sur l'horizon, considérée positive quand le vent est ascendant, $\bar{V}$ la vitesse de l'appareil considérée horizontale par rapport au sol. La vitesse relative $\bar{W}$ de l'appareil par rapport à l'ensemble de la masse d'air qui contient l'appareil aura pour valeur (voir *fig. 9*)

$$\bar{W} = \bar{V} - \bar{v} \quad (\text{différence géométrique}).$$

Soit φ l'inclinaison de $\bar{W}$ sur l'horizon, angle que nous considérerons comme positif quand $\bar{W}$ sera dirigé vers le sol (cas de la *fig. 9*); φ est donc toujours positif quand $\bar{v}$ est ascendant. En considérant φ comme petit et en négligeant l'inclinaison de Φ sur

$\overline{W}$ les équations caractéristiques du régime seront

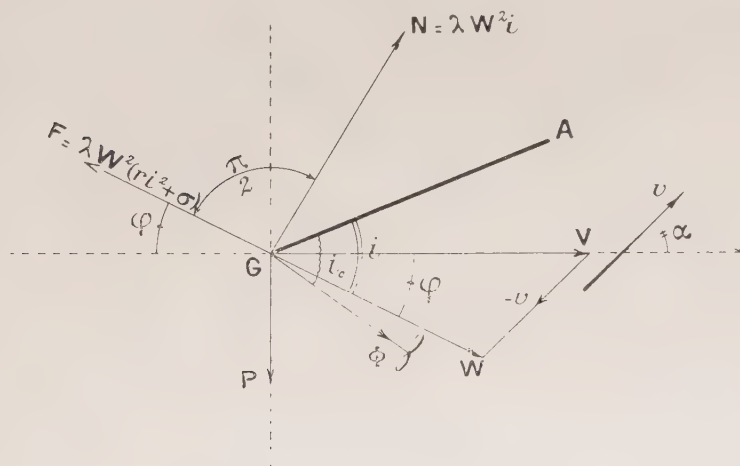
$$(29a) \quad P = \lambda W^2 i,$$

$$(29b) \quad \Phi + P\varphi = \lambda W^2 (ri^2 + \sigma),$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(29c) \quad \frac{\Phi + P\varphi}{P} = ri + \frac{\sigma}{i}.$$

Fig. 9.



De même que dans les cas précédents, l'hyperbole de Penaud, de la figure 6, peut servir à illustrer tous les régimes possibles, suivant les différentes valeurs de φ . On voit que dans ce cas φ joue un rôle tout à fait analogue à γ_1 dans le cas des régimes de montée et de descente en air calme et ceci se conçoit aisément. Pour maintenir sa trajectoire horizontale dans un vent descendant, par exemple, l'appareil devra, pour ainsi dire, monter dans le vent. Ce sera le contraire pour un vent ascendant.

28. Les régimes de montée et de descente par vent régulier.

— On peut de même aisément analyser les régimes de montée ou de descente par vent régulier ascendant ou descendant. Soit γ_1 l'inclinaison de la vitesse absolue $\overline{V}$ de notre appareil sur l'horizon (fig. 10) comptée positive quand $\overline{V}$ est ascendant et ψ l'inclinaison

négalif et grand en valeur absolue. Or, comme la quantité $\frac{\Phi + P(\psi - \gamma_1)}{P}$ ne peut pas être inférieure à γ_m ordonnée du point m de l'hyperbole de Penaud, pour qu'il y ait possibilité d'établissement d'un régime, la quantité γ_1 doit prendre une valeur négative assez grande pour que, pour le moins, l'égalité

$$\gamma_m = \frac{\Phi + P(\psi - \gamma_1)}{P}$$

puisse avoir lieu. Pour que le pilote puisse encore assurer à l'appareil une trajectoire horizontale, c'est-à-dire qu'on ait $\gamma_1 = 0$, par une manœuvre convenable du gouvernail horizontal, il faut que ψ ne dépasse pas la valeur donnée par l'équation

$$\gamma_m = \frac{\Phi - P|\psi|}{P},$$

d'où l'on a

$$|\psi| = \frac{\Phi}{P} - \gamma_m,$$

où ψ est considéré pris en valeur absolue. ψ pourra être d'autant plus grand que sera plus grande la différence $\frac{\Phi}{P} - \gamma_m$, et l'appareil pourra voler par un vent d'autant plus descendant. Ce fait ne doit pas être perdu de vue par les constructeurs d'aéroplanes. On a beaucoup écrit et discuté sur l'avantage qu'il y avait de rapprocher le régime d'un aéroplane soit du régime de puissance minima soit du régime de poussée des hélices minima. Mais on voit aisément qu'il est absolument nécessaire, au contraire, de s'écarter, dans une certaine mesure, de ces régimes (évidemment à gauche du point m sur l'hyperbole de Penaud) afin de pouvoir assurer le vol de l'aéroplane par un vent descendant.

Sans m'attarder davantage aux nombreuses conclusions fort importantes, tant au point de vue théorique que pratique, que l'on peut tirer de la considération des régimes de l'aéroplane, je passe à l'étude du couple central que je vais exposer avec toute l'ampleur que nécessite cette importante question.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU COUPLE CENTRAL.

29. Par couple central, nous entendons le moment de toutes les forces agissantes sur l'aéroplane, par rapport à son centre de gravité, exclusion faite du couple d'amortissement. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 22, pour l'aéroplane que nous considérons, le couple central se réduit au moment des réactions de l'air sur la voilure dues à la translation de l'appareil et au moment de la poussée résultante Φ des hélices. Nous commencerons par n'envisager que le mouvement de l'appareil parallèlement à son plan de symétrie; alors les quilles et le gouvernail vertical n'interviendront que comme résistances à l'avancement.

Quand, pour un appareil, le régime est atteint, le couple central est nul, comme nous l'avons vu précédemment, mais quand l'appareil effectue certaines oscillations autour de son régime, le couple central prend des valeurs déterminées. C'est l'étude des variations du couple central, quand varient les caractéristiques du régime de l'appareil que nous avons principalement en vue et que nous ferons successivement pour toute une série de cas particuliers qui englobent, dans leur ensemble, la grande majorité des cas qui peuvent pratiquement se rencontrer. Nous verrons que la simple étude des variations du couple central nous éclairera déjà sur bien des propriétés de l'aéroplane. Il s'en dégagera même une conclusion fondamentale de la plus haute importance qui, invraisemblable de prime abord, est pourtant un des plus importants résultats mis en relief, en toute rigueur, par cette discussion, à savoir : que le rôle des empennages horizontaux, tels que la queue, par exemple, est absolument indépendant du sens de déplacement du centre de pression.

Au paragraphe 12, nous avons vu qu'à l'heure actuelle on est encore assez mal renseigné sur les déplacements du centre de pression; c'est pourquoi nous ferons toute cette étude en envisageant

parallèlement le déplacement direct et le déplacement inverse du centre de pression, afin d'embrasser, dans une première approximation, toutes les possibilités.

Nous allons commencer par calculer d'abord, simplement, la valeur du couple central, pour divers cas particuliers, afin de ne pas encombrer, par des calculs, du reste fort simples, la discussion qui va suivre, relative au couple central.

I. — DÉTERMINATION DE LA VALEUR DU COUPLE CENTRAL.

30. Dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression. — La figure 11 représente schématiquement la coupe d'un aéroplane par son plan de symétrie confondu avec le plan du dessin. vv' est le plan fictif équivalent à toute la voilure principale de l'appareil, qq' la queue, aa' un empennage horizontal d'avant (le gouvernail horizontal placé à l'avant, quand il est bloqué, joue le rôle d'un tel empennage). G est le centre de gravité de tout l'appareil, G' la projection de G sur vv' . R est la résultante des réactions de l'air sur la voilure principale, normale, dans une première approximation, à vv' . C est le centre de pression, C_0 la position limite de C pour l'angle d'attaque $i = 0$. Comme nous l'avons indiqué page 24, pour le déplacement direct du centre de pression, nous avons, dans une première approximation $C_0C = p_1 h$ $i = \mu i$ en posant $p_1 h = \mu$. Nous désignerons la distance C_0G' par α . V est la vitesse du vent relatif, par rapport à l'appareil que nous supposons animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. R_q est la résistance de l'air de la queue, β l'inclinaison de la queue par rapport à la voilure principale, considérée positive quand la queue est plus cabrée que la voilure principale. Nous n'envisagerons que les petites inclinaisons des empennages horizontaux par rapport à la voilure principale, de sorte que dans une première approximation, on pourra considérer $\cos \beta \cong 1$ et $\sin \beta \cong \beta$. Nous supposons que pour la queue, de même que pour la voilure principale, le déplacement du centre de pression est direct. C' est le centre de pression de la queue, C'_0 sa position limite pour $i = 0$. Comme l'angle d'attaque de la queue a, avec nos notations, la valeur $(i + \beta)$ la distance C'_0C' peut, de même

que pour la voilure principale, être exprimée, dans une première approximation, par la formule $C'_0C' = \mu_q |i + \beta|$ grandeur, qui est sensiblement égale à sa projection sur $\nu\nu'$, μ_q étant un coefficient analogue à μ mais pouvant, en général, être distinct de μ , car la queue peut avoir un profil différent de celui de la voilure principale. La quantité $\mu_q |i + \beta|$ ne doit être considérée qu'en valeur absolue, car quand β diminue, le centre de pression C' se rapproche de sa position limite C_0 jusqu'à ce que β devienne égal à $-i$, mais quand β continue à décroître, la queue reçoit le vent sur le dos, et le centre de pression s'écarte de C'_0 ; pour $\beta = -i$ il y a donc un changement de sens dans le déplacement du centre de pression, la formule $\mu_q (i + \beta)$ change de signe tandis que la distance C'_0C' le conserve⁽¹⁾. Par L nous désignons la distance entre C_0 et C'_0 mesurée parallèlement à $\nu\nu'$. Quand la voilure principale et la queue ont même profil, alors L est égal à la distance entre leurs bords d'attaque ν et q . De même pour l'empennage horizontal d'avant, nous représentons par R_a la résistance de l'air, par β' nous désignons l'inclinaison de aa' sur $\nu\nu'$. La distance C'_0C'' peut être exprimée par $\mu_a |i + \beta'|$; L' représente la distance C'_0C_0 . i , β et β' étant considérés comme de petits angles, R , R_q et R_a sont en valeur absolue, très sensiblement, respectivement égaux aux poussées de la voilure principale, de la queue et de l'empennage horizontal d'avant. Par Φ , nous figurons en grandeur et position la poussée résultante des hélices de l'appareil et par l nous désignons la distance de Φ au centre de gravité G de tout l'appareil. Nous représentons par M le moment de Φ par rapport à G , c'est-à-dire que nous posons $\Phi l = M$. Tous les couples que nous envisagerons seront considérés comme positifs, quand il seront cabreurs, c'est-à-dire, quand ils tendront à augmenter l'inclinaison de l'appareil, et négatifs quand ils seront inclineurs. M sera donc positif quand Φ sera disposé au-dessous de G et négatif dans le cas contraire. Nous allons successivement calculer la valeur du couple central, pour un appareil dénué d'empennages horizon-

(1) Quand le profil de la queue est incurvé, nous supposons qu'elle est retournée quand elle commence à recevoir le vent sur le dos, afin qu'elle reçoive le vent toujours sur sa même face et que le déplacement du centre de pression s'effectue par conséquent suivant la même loi.

taux, pour un appareil muni d'une queue et pour un appareil muni d'un empennage horizontal d'avant.

Appareil sans empennages horizontaux. — Désignons par Γ_v le moment des réactions de l'air sur la voilure principale, par rapport au centre de gravité de tout l'appareil et désignons par Γ le couple central de tout l'appareil qui, dans ce cas, est uniquement constitué par la somme de Γ_v et de M . En s'en rapportant à la figure 11, on a directement en grandeur et signe :

$$\Gamma = \Gamma_v + M = R(\alpha - \mu i) + M = KAV^2 i(\alpha - \mu i) + M,$$

en posant

$$KA = \lambda,$$

on a

$$(31) \quad \Gamma = \lambda V^2 i(\alpha - \mu i) + M,$$

formule valable, suivant ce que nous avons vu page 24, seulement pour i compris entre 0° et 15° environ. Cette remarque se rapporte aussi à toutes les formules qui suivent.

Appareil avec queue. — Le couple central, de tout l'appareil, est égal à la somme des couples centraux dues séparément, à la voilure principale, à la poussée Φ des hélices et à la queue. En désignant par Γ_q le couple central dû à la queue, d'après la figure 11, on voit aisément qu'en grandeur et signe, on a :

$$\Gamma_q = -R_q [L + \mu_q | i + \beta | - \alpha],$$

or R_q est de la forme $R_q = K_q A_q V^2 (i + \beta)$. On peut donc, en désignant par ρ le rapport

$$\rho = \frac{K_q A_q}{KA} = \frac{K_q A_q}{\lambda},$$

écrire

$$(32a) \quad \Gamma_q = -\rho \lambda V^2 (i + \beta) [L + \mu_q | i + \beta | - \alpha].$$

Cette formule se décompose, en réalité, en deux :

Pour $\beta \geq -i$, on a

$$(32b) \quad \Gamma_q = -\rho \lambda V^2 (i + \beta) [L + \mu_q (i + \beta) - \alpha].$$

Pour $\beta \leq -i$, on a

$$(32c) \quad \Gamma_q = -\rho \lambda V^2 (i + \beta) [L - \mu_q (i + \beta) - \alpha].$$

Le couple central de tout l'appareil a donc pour valeur :

Pour $\beta \geq -i$

$$\begin{aligned} (33 a) \quad \Gamma &= \Gamma_v + \Gamma_q + M \\ &= \lambda V^2 i(\alpha - \mu i) - \rho \lambda V^2 (i + \beta) [L + \mu_q(i + \beta) - \alpha] + M \\ &= \frac{1}{2} - i^2(\mu + \rho \mu_q) + i[\alpha(1 + \rho) - \rho(L + 2\mu_q \beta)] \\ &\quad - \rho \beta(L - \alpha + \mu_q \beta) \frac{1}{2} \lambda V^2 + M. \end{aligned}$$

Pour $\beta \leq -i$

$$\begin{aligned} (33 b) \quad \Gamma &= \frac{1}{2} - i^2(\mu - \rho \mu_q) \\ &\quad + i[\alpha(1 + \rho) - \rho(L - 2\mu_q \beta)] - \rho \beta(L - \alpha - \mu_q \beta) \frac{1}{2} \lambda V^2 + M. \end{aligned}$$

Les formules (33 a) et (33 b) ne diffèrent que par le signe de μ_q .

Appareil avec empennage horizontal d'avant. — En désignant par Γ_a le couple central, dû à l'empennage horizontal d'avant, on a, de même que précédemment, en s'en rapportant à la figure 11, en grandeur et signe

$$(34 a) \quad \Gamma_a = R_a [L' - \mu_a | i + \beta | + \alpha],$$

formule qui se décompose en deux :

Pour $\beta \geq -i$

$$(34 b) \quad \Gamma_a = \rho' \lambda V^2 (i + \beta') [L' - \mu_a (i + \beta) + \alpha].$$

Pour $\beta \leq -i$

$$(34 c) \quad \Gamma_a = \rho' \lambda V^2 (i + \beta') [L' + \mu_a (i + \beta) + \alpha].$$

Le couple central de tout l'appareil a pour valeur :

Pour $\beta \geq -i$

$$\begin{aligned} (35 a) \quad \Gamma &= \Gamma_v + \Gamma_a + M \\ &= \frac{1}{2} - i^2(\mu + \rho' \mu_a) + i[\alpha(1 + \rho') + \rho'(L' - 2\mu_a \beta')] \\ &\quad + \rho' \beta'(L' + \alpha - \mu_a \beta') \frac{1}{2} \lambda V^2 + M. \end{aligned}$$

Pour $\beta \leq -i$

$$\begin{aligned} (35 b) \quad \Gamma &= \frac{1}{2} - i^2(\mu - \rho' \mu_a) + i[\alpha(1 + \rho') + \rho'(L' + 2\mu_a \beta')] \\ &\quad + \rho' \beta'(L' + \alpha + \mu_a \beta') \frac{1}{2} \lambda V^2 + M. \end{aligned}$$

Les formules (35 a) et (35 b) ne diffèrent que par le signe de μ_a .

31. Dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression. — La figure 12, tout à fait analogue à la figure 11, est faite avec les mêmes notations dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression. Les formules qui suivent donnent la valeur du couple central pour les trois cas précédemment envisagés.

Appareils sans empennages horizontaux. — En s'en rapportant à la figure 12, on a directement

$$(36) \quad \Gamma = \Gamma_v + M = -R(\alpha - \mu i) + M \\ = -KAV^2 i(\alpha - \mu i) + M = -\lambda V^2 i(\alpha - \mu i) + M.$$

Appareil avec queue. — Le couple central, dû à la queue, a pour valeur

$$\Gamma_q = -R_q [L - \mu_q |i + \beta| + \alpha].$$

D'où l'on a

Pour $\beta \geq -i$

$$(37a) \quad \Gamma_q = -\rho \lambda V^2 (i + \beta) [L - \mu_q (i + \beta) + \alpha].$$

Pour $\beta \leq -i$

$$(37b) \quad \Gamma_q = -\rho \lambda V^2 (i + \beta) [L + \mu_q (i + \beta) + \alpha].$$

Le couple central de tout l'appareil a pour valeur:

Pour $\beta \geq -i$

$$(38a) \quad \Gamma = \Gamma_v + \Gamma_q = M \\ = \frac{1}{2} i^2 (\mu + \rho \mu_q) - i [\alpha (1 + \rho) + \rho (L - 2 \mu_q \beta)] \\ - \rho \beta (L - \mu_q \beta + \alpha) \frac{1}{2} \lambda V^2 + M.$$

Pour $\beta \leq -i$

$$(38b) \quad \Gamma = i^2 (\mu - \rho \mu_q) - i [\alpha (1 + \rho) + \rho (L + 2 \mu_q \beta)] \\ - \rho \beta (L + \mu_q \beta + \alpha) \frac{1}{2} \lambda V^2 + M.$$

Ces formules (38) ne diffèrent des formules correspondantes (33) que par les signes de α , μ et μ_q .

Appareil avec empennage horizontal d'avant. — Le couple central, dû à l'empennage horizontal d'avant, a pour valeur

$$\Gamma_a = R_a [L' - \mu_a |i + \beta'| + \alpha'].$$

D'où l'on a

Pour $\beta \geq -i$

$$(39 a) \quad \Gamma_a = \rho' \lambda V^2 (i + \beta') [L' + \mu_a (i + \beta') - a].$$

Pour $\beta \leq -i$

$$(39 b) \quad \Gamma_a = \rho' \lambda V^2 (i + \beta') [L' - \mu_a (i + \beta') - a].$$

Le couple central de tout l'appareil a pour valeur :

Pour $\beta \geq -i$

$$(40 a) \quad \Gamma = i^2 (\mu + \rho' \mu_a) + i [\rho' (L' + 2 \mu_a \beta') - a (1 + \rho')] + \rho' \beta' (L' + \mu_a \beta' - a) \{ \lambda V^2 + M. \}$$

Pour $\beta \leq -i$

$$(40 b) \quad \Gamma = i^2 (\mu - \rho' \mu_a) + i [\rho' (L' - 2 \mu_a \beta') - a (1 + \rho')] + \rho' \beta' (L' - \mu_a \beta' - a) \{ \lambda V^2 + M. \}$$

Ces formules (40) se distinguent des formules correspondantes (35) par les signes de a , μ et μ_a .

Dans toutes les formules de ce paragraphe, les coefficients μ , μ_q et μ_a se rapportent au déplacement inverse du centre de pression et peuvent évidemment avoir des valeurs autres que dans le cas du déplacement direct.

II. — ÉTUDE COMPARATIVE DES VARIATIONS DU COUPLE CENTRAL.

32. Dans quel but les aéroplanes sont-ils munis le plus souvent d'empennages horizontaux, qui sont le plus généralement des queues? Dans le seul but d'accroître les variations de leur couple central, quand l'appareil, par une cause perturbatrice quelconque, est dérangé de son orientation de régime. La variation du couple central doit évidemment remplir le rôle d'un couple de rappel de l'appareil vers son orientation de régime, pour que son action soit favorable à la stabilité de l'appareil. Quelle valeur doit avoir la variation du couple central pour que son action soit la plus efficace? C'est une question que nous traiterons plus tard dans la suite de cette étude et que l'étude du mouvement de l'aéroplane nous apprendra à discerner. Pour le moment nous voulons seule-

ment étudier dans quelle mesure la grandeur des variations du couple central dépend des empennages horizontaux. La question ainsi posée est un peu vague et demande à être précisée pour pouvoir être abordée sous forme bien explicite.

Au début de la réalisation des premiers essais de construction des aéroplanes, l'idée des empennages horizontaux est assez aisément venue par analogie avec la queue des oiseaux. Les premières expériences permirent de constater, comme il était d'ailleurs assez aisé de le prévoir, que l'efficacité de l'action d'un empennage horizontal dépend essentiellement : 1° de ses dimensions ; 2° de son écartement du centre de gravité de l'appareil ; 3° de son inclinaison. Il est assez facile de se rendre compte que l'efficacité d'un empennage horizontal croît avec sa surface et avec son éloignement. Mais la question est beaucoup plus complexe en ce qui concerne l'inclinaison de l'empennage et c'est la signification de ce facteur qu'il importe surtout de bien éclairer.

Considérons l'aéroplane que nous voulons munir d'un empennage horizontal de dimension donnée, et d'écartement déterminé du centre de gravité de l'appareil, mais dont l'inclinaison reste à fixer. Comment allons-nous pratiquement procéder ? Un aéroplane est généralement construit pour voler sous un angle d'attaque déterminé, ou plus exactement parlant, l'angle d'attaque de son régime horizontal doit être compris entre des limites assez étroites pour que l'appareil se trouve dans des conditions favorables de vol. Cette question de la détermination de la valeur la plus favorable de l'angle d'attaque du régime normal d'un aéroplane est assez délicate. Si l'on s'en rapporte à l'hyperbole de Penaud de la figure 6, page 60, le point représentatif du régime normal doit être situé, comme nous l'avons vu, à droite du point m pour que le vol de l'appareil soit possible par vent descendant. Or l'abscisse de ce point est généralement petite, l'angle d'attaque doit donc être nécessairement petit. Mais il ne peut pas toutefois être trop petit, car le rapport $\frac{\Phi}{P}$ ne peut pas pratiquement être rendu aussi grand que l'on veut. Quand on augmente Φ , il faut augmenter la puissance du moteur nécessaire pour actionner les hélices ce qui entraîne nécessairement une augmentation du poids du moteur et par conséquent du poids de tout l'appareil. Le rapport $\frac{\Phi}{P}$ ne croît donc pas

nécessairement avec Φ . On a tout avantage à rendre ce rapport aussi grand que possible, car alors la vitesse de l'appareil est plus grande, mais le poids du moteur et les exigences de construction de l'aéroplane nous infligent certaines limites. Quand on ne possède pas de moteurs suffisamment légers pour rendre le rapport $\frac{\Phi}{P}$ supérieur à γ_m la réalisation du vol de l'aéroplane était même impossible. On est ainsi, par ces considérations, amené à adopter une certaine valeur moyenne pour l'angle d'attaque du régime normal, qui, pour un appareil déterminé se trouve donc fixé, soit $i \cong i_0$, du moins dans des limites assez étroites. Si nous considérons donc l'appareil complètement construit, et qu'il ne nous reste plus qu'à fixer l'orientation de l'empennage horizontal, nous devons donner à ce dernier une inclinaison telle que le couple central de tout l'appareil s'annule pour $i = i_0$, toutes ces gouvernes étant disposées dans leur orientation moyenne. Dans ces conditions seulement on pourra réaliser un régime avec un angle d'attaque égal à i_0 . Mais si nous procédons ainsi, nous ne sommes nullement maîtres de l'inclinaison de l'empennage horizontal de l'appareil qui est alors fixé par la constitution générale même de l'appareil. Nous ne pouvons donc pas faire varier cette inclinaison, ni par conséquent étudier l'influence de cette inclinaison sur les variations du couple central.

Si donc nous voulons avoir un appareil dont l'empennage horizontal ait une inclinaison donnée, nous devons construire l'appareil spécialement pour l'inclinaison choisie. Comment devons-nous procéder pour cela? Supposons l'empennage horizontal fixé à l'appareil sous une inclinaison donnée. On pourra toujours par une distribution convenable des masses composant l'esquif de l'appareil donner au centre de gravité de tout l'appareil une position telle que pour $i = i_0$ le couple central s'annule effectivement, l'empennage horizontal étant disposé sous l'inclinaison choisie. Généralement un déplacement de l'esquif dans son ensemble par rapport à la voilure principale de l'appareil suffira pour atteindre ce résultat. La position relative du centre de gravité de tout l'appareil dépend donc essentiellement de l'inclinaison adoptée pour l'empennage horizontal. Pour étudier l'efficacité comparative des empennages horizontaux disposés sous différentes inclinaisons on ne peut donc pas envisager un appareil dont la voilure principale

et l'esquif sont invariablement liés. Tout au contraire, il faut envisager toute une série d'appareils, chacun étant construit de telle manière qu'il puisse atteindre son régime normal avec son empennage horizontal disposé sous l'inclinaison choisie, et c'est en comparant les variations des couples centraux de tels appareils qu'on pourra se rendre compte de l'influence de divers facteurs, dont dépend l'empennage horizontal, et spécialement de l'influence de son inclinaison. Si l'on voulait examiner le rôle d'un empennage horizontal sur un même appareil invariable, cette étude serait tout à fait illusoire, car pour chaque nouvelle inclinaison de son empennage, l'appareil se trouverait dans des conditions de vol essentiellement différentes et souvent même impossibles, et l'on n'aurait aucune base de comparaison. C'est la nécessité d'envisager le déplacement relatif de l'esquif et de la voilure principale de l'aéroplane pour chaque nouvelle orientation de son empennage horizontal qui constitue la grande difficulté dans la compréhension du vrai rôle des différents facteurs dont dépend un empennage horizontal, et c'est la méconnaissance de ce fait qui a empêché jusqu'à ce jour de soumettre ces empennages à une analyse détaillée et complète. Tous les constructeurs savent par exemple parfaitement, quoiqu'ils se gardent bien de le faire trop savoir, que pour que l'action d'une queue soit efficace, il faut nécessairement que cette dernière soit moins cabrée que la voilure principale. Mais à part cela, quelle est la meilleure disposition à donner à la queue, on ne s'en rend nullement compte. Vaut-il mieux disposer la queue dans le lit du vent, ou bien sous un faible angle d'attaque ou encore tout autrement? La discussion qui va suivre nous donnera des réponses catégoriques à toutes les questions, que les empennages horizontaux peuvent soulever.

Pour avoir un franc terrain de comparaison, nous envisagerons toute une série d'aéroplanes en tout point identiques, mais dont l'un est dénué d'empennages horizontaux, tandis que tous les autres sont munis, soit d'une queue, soit d'un empennage horizontal d'avant, empennage qui a dans chaque appareil, même dimensions, même éloignement de la voilure principale de l'appareil, mais qui est différemment incliné dans chaque appareil. Chaque appareil est donc caractérisé dans le langage de nos notations par une valeur particulière de β . Tous les appareils sont en outre

construits de telle manière que leur régime normal soit atteint pour $i=i_0$ ce qu'on peut toujours obtenir par une disposition relative convenable de la voilure principale et de l'esquif de l'appareil considéré. Pour un appareil caractérisé par une valeur β donnée, nous avons donc d'abord à déterminer la position du centre de gravité de tout l'appareil qui doit être telle que pour $i=i_0$ le couple central soit nul. C'est la condition de $\Gamma=0$ pour $i=i_0$ qui nous fixera donc la position relative du centre de gravité de tout l'appareil. Cette détermination effectuée, l'appareil est complètement déterminé, et nous pouvons étudier les variations de son couple central quand son angle d'attaque varie à partir de sa valeur i_0 de régime normal.

L'étude des quelques cas particuliers qui va suivre permettra de mieux comprendre toute la portée de ces considérations générales. Nous envisagerons successivement le déplacement direct et le déplacement inverse du centre de pression.

*Variations du couple central pour l'appareil
sans empennages horizontaux.*

1° DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT DIRECT DU CENTRE DE PRESSION.

33. Le couple central d'un appareil sans empennages horizontaux nous est donné dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression, par la formule (31) page 72. Nous avons

$$(31) \quad \Gamma = \Gamma_p + M = \lambda V^2 i (\alpha - \mu i) + M.$$

Comme pour $i=i_0$ le couple central doit être nul, ainsi que nous l'avons précédemment expliqué, on doit donc avoir

$$\lambda V_0^2 i_0 (\alpha - \mu i_0) + M = 0,$$

équation qui nous fixe la valeur de α , c'est-à-dire la position relative du centre de gravité G de tout l'appareil par rapport à la voilure principale (voir fig. 11). Nous avons directement

$$(41) \quad \alpha = \mu i_0 - \frac{M}{\lambda V_0^2 i_0}.$$

C'est cette dernière valeur qui doit être attribuée à α dans (31)

pour que l'appareil considéré puisse atteindre son régime normal, pour $i=i_0$. Ayant donné au centre de gravité de tout l'appareil la position définie par l'équation (41), le couple central de l'appareil s'annulera pour $i=i_0$. Mais quand l'appareil effectuera certaines oscillations autour de son régime, c'est-à-dire quand l'angle d'attaque i prendra des valeurs différentes de i_0 , alors le couple central prendra certaines valeurs. Si nous ne considérons que les petites variations δV et δi de V et de i , autour de leurs valeurs de régime V_0 et i_0 , alors d'après l'équation (31) les variations du couple central auront pour valeur dans une première approximation

$$(42) \quad \delta \Gamma = \frac{2\Gamma_v^0}{V_0} \delta V + \left(\frac{\Gamma_v^0}{i_0} - \lambda V_0^2 \mu i_0 \right) \delta i,$$

en désignant par Γ_v^0 la valeur de Γ_v pour $V=V_0$; $i=i_0$.

Considérons d'abord le cas où la poussée des hélices Φ passe exactement par le centre de gravité de l'appareil. Alors $M=O$. Le couple central Γ se réduit alors à Γ_v et c'est la condition $\Gamma_v^0=0$ qui nous donne dans ce cas la valeur correspondante de $\alpha=\mu i_0$. La variation du couple central se réduit dans ce cas à

$$(43) \quad \delta \Gamma = -\lambda V_0^2 \mu i_0 \delta i.$$

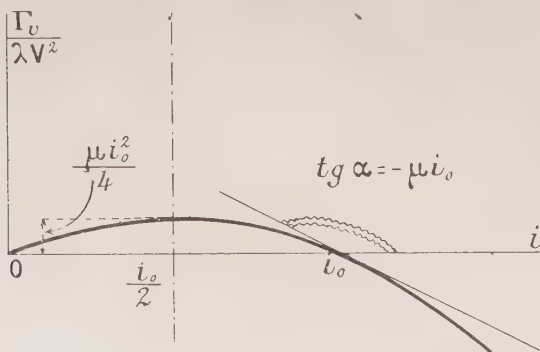
La variation du couple central pour $M=O$ ne dépend donc, dans une première approximation, que de la variation de l'angle d'attaque. Pour se rendre compte des variations du couple central nous n'avons donc qu'à examiner les variations de Γ_v en fonction de i . Nous avons

$$\Gamma_v = \lambda V^2 i (\mu i_0 - \mu i).$$

Pour suivre plus aisément la dépendance de Γ_v de l'angle d'attaque interprétons géométriquement cette équation en prenant $\frac{\Gamma_v}{\lambda V^2}$ pour ordonnée et i pour abscisse. Nous obtenons ainsi la parabole représentée sur la figure 13 et dont évidemment seule la partie voisine du point $(i=i_0; \frac{\Gamma_v}{\lambda V^2}=0)$ est à considérer. D'après cette figure on voit aisément que quand i décroît à partir de sa valeur i_0 , le couple central prend des valeurs positives, c'est-à-dire qu'il est cabreur. Au contraire, quand i croît à partir de i_0 , le couple central prend des valeurs négatives, il est inclineur. Dans tous les cas,

les variations du couple central sont toujours directement contraires aux variations de l'angle d'attaque i . Le couple central est donc dans ce cas un couple de rappel qui tend à ramener l'appareil vers son orientation de régime. C'est ce que nous pouvons exprimer en disant que le couple central est stabilisateur. Le coefficient

Fig. 13.



angulaire $\text{tang } \alpha$ de la tangente à la parabole de la figure 13 au point $(i = i_0; \frac{\Gamma_v}{\lambda V^2} = 0)$ et dont la valeur est donnée sur cette figure, caractérise les variations du couple central au voisinage de ce point. On conçoit aisément que $\lambda V_0^2 \text{ tang } \alpha$ est égal en grandeur et signe au coefficient de δi dans la formule (43). Quand le couple central est stabilisateur $\text{tang } \alpha$ est nécessairement négatif, et les variations du couple central sont d'autant plus brusques que la valeur absolue de $\text{tang } \alpha$ est plus grande en valeur absolue.

Considérons maintenant le cas général où la poussée des hélices ne passe pas par G. Alors la variation du couple central nous est donnée par la formule (42) et elle dépend tout aussi bien de δV que de δi , c'est-à-dire de la variation de la vitesse de l'appareil et de la variation de son angle d'attaque. En remarquant que $\Gamma_v^0 = -M$ on a

$$(44) \quad \delta \Gamma = -\frac{2M}{V_0} \delta V - \left(\frac{M}{i_0} + \lambda V_0^2 \mu i_0 \right) \delta i.$$

En comparant les formules 43 et 44 on voit qu'au coefficient de δi le terme $\frac{M}{i_0}$ s'est adjoint. Quant M est positif, c'est-à-dire quand

la poussée des hélices est disposée sous le centre de gravité de l'appareil, la fraction de la variation du couple central proportionnelle à δi est accrue et cette fraction du couple central est stabilisatrice. La fraction du couple central proportionnelle à δV est, comme on le voit, de signe contraire à M . Cette différence essentielle dans les variations du couple central pour le cas où Φ ne passe pas par G , comparativement au cas où Φ passe par G , a été pour la première fois remarquée par M. Paul Painlevé. Nous verrons plus tard quelle est l'influence de la décentration de la poussée des hélices sur la stabilité de l'appareil.

2° DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT INVERSE DU CENTRE DE PRESSION.

34. Dans ce cas le couple central a pour expression [voir p. 74, formule (36)]

$$(36) \quad \Gamma = \Gamma_v + M = -\lambda V^2 i(\alpha - \mu i) + M.$$

La position relative de G par rapport à la voilure principale de l'appareil nous est fixée par la condition

$$-\lambda V_0^2 i_0(\alpha - \mu i_0) + M = 0,$$

d'où l'on a directement

$$\alpha = \mu i_0 + \frac{M}{\lambda V_0^2 i_0}.$$

Pour que l'appareil considéré puisse atteindre son régime normal pour $i = i_0$ c'est cette dernière valeur qu'on doit attribuer à α dans l'équation (36).

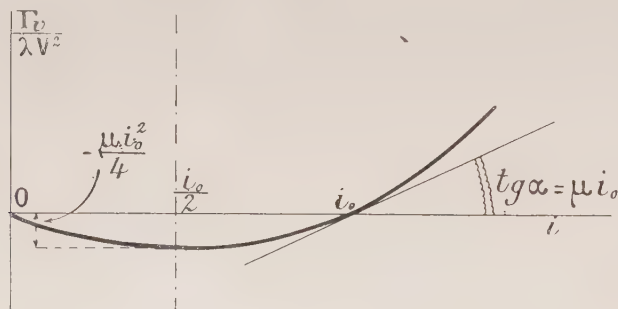
Considérons d'abord le cas où Φ passe par G . Γ se réduit alors Γ_v car $M = 0$ et α doit simplement avoir la valeur $\alpha = \mu i_0$. La variation du couple central ne dépend comme précédemment que de la variation de l'angle d'attaque. Nous avons

$$\Gamma_v = -\lambda V^2 i(\mu i_0 - \mu i),$$

équation qui nous permet de suivre les variations de Γ_v en fonction de i . Interprétée géométriquement en prenant $\frac{\Gamma_v}{\lambda V^2}$ pour ordonnée et i pour abscisse cette équation représente une parabole représentée sur la figure 14. Dans ce cas quand i décroît à partir de

sa valeur i_0 , $\frac{\Gamma_v}{\lambda V^2}$ prend des valeurs négatives et inversement $\frac{\Gamma_v}{\lambda V^2}$ prend des valeurs positives quand i croît à partir de sa valeur i_0 . Les variations de $\frac{\Gamma_v}{\lambda V^2}$ au voisinage du point $(i = i_0, \frac{\Gamma_v}{\lambda V^2} = 0)$ sont

Fig. 14.



donc toujours de même signe que celles de i . Le couple central tend donc dans ce cas à éloigner l'appareil de son orientation de régime quand il en est écarté. Le couple central n'est donc pas un couple de rappel, il est déstabilisateur, $\tan \alpha$ est positif.

Au voisinage du point $(\frac{\Gamma_v}{\lambda V^2} = 0; i = i_0)$ les variations du couple central ont pour expression

$$(45) \quad \delta \Gamma_v = \lambda V_0^2 \tan \alpha = \lambda V_0^2 \mu i_0 \delta i.$$

Dans le cas où Φ ne passe pas par G , M n'est plus nul et les variations du couple central ont pour expression

$$(46) \quad \delta \Gamma = -\frac{2M}{V_0} \delta V + \left(\lambda V_0^2 i_0 \mu - \frac{M}{i_0} \right) \delta i.$$

Les variations du couple central dépendent donc tout aussi bien de δV que de δi . On voit que quand M est positif et suffisamment grand pour qu'on ait $\lambda V_0^2 i_0 \mu - \frac{M}{i_0} < 0$, la fraction de la variation du couple central proportionnelle à δi est de signe contraire à δi , cette fraction du couple central peut donc être rendue stabilisatrice en disposant la poussée des hélices sous le centre de gravité de l'appareil.

Variations du couple central pour les appareils munis de queues.

1° DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT DIRECT DU CENTRE DE PRESSION.

35. Chaque appareil muni d'une queue est caractérisé dans le langage de nos notations par une valeur particulière de β . Considérons d'abord les appareils pour lesquels $\beta \geq -i$. Dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression, le couple central d'un tel appareil a pour expression [voir p. 73, formule (33a)].

$$(33a) \quad \Gamma = \left\{ -i^2(\mu + \rho\mu_q) + i[a(1 + \rho) - \rho(L + 2\mu_q\beta)] \right. \\ \left. - \rho\beta(L - a + \mu_q\beta) \right\} \lambda V^2 + M.$$

Pour que chacun de ces appareils puisse atteindre son régime normal pour $i = i_0$, il faut que pour cette valeur de l'angle d'attaque, on ait $\Gamma = 0$ c'est-à-dire

$$\left\{ -i_0^2(\mu + \rho\mu_q) + i_0[a(1 + \rho) - \rho(L + 2\mu_q\beta)] \right. \\ \left. - \rho\beta(L - a + \mu_q\beta) \right\} \lambda V_0^2 + M = 0.$$

Cette condition nous détermine la position relative de G par rapport à la voilure principale de l'appareil, c'est-à-dire nous fixe la valeur correspondante de a . Nous avons directement :

$$(47) \quad a = - \frac{\frac{M}{\lambda V_0^2} + \mu i_0^2 + \rho(i_0 + \beta)[L + \mu_q(i_0 + \beta)]}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)}.$$

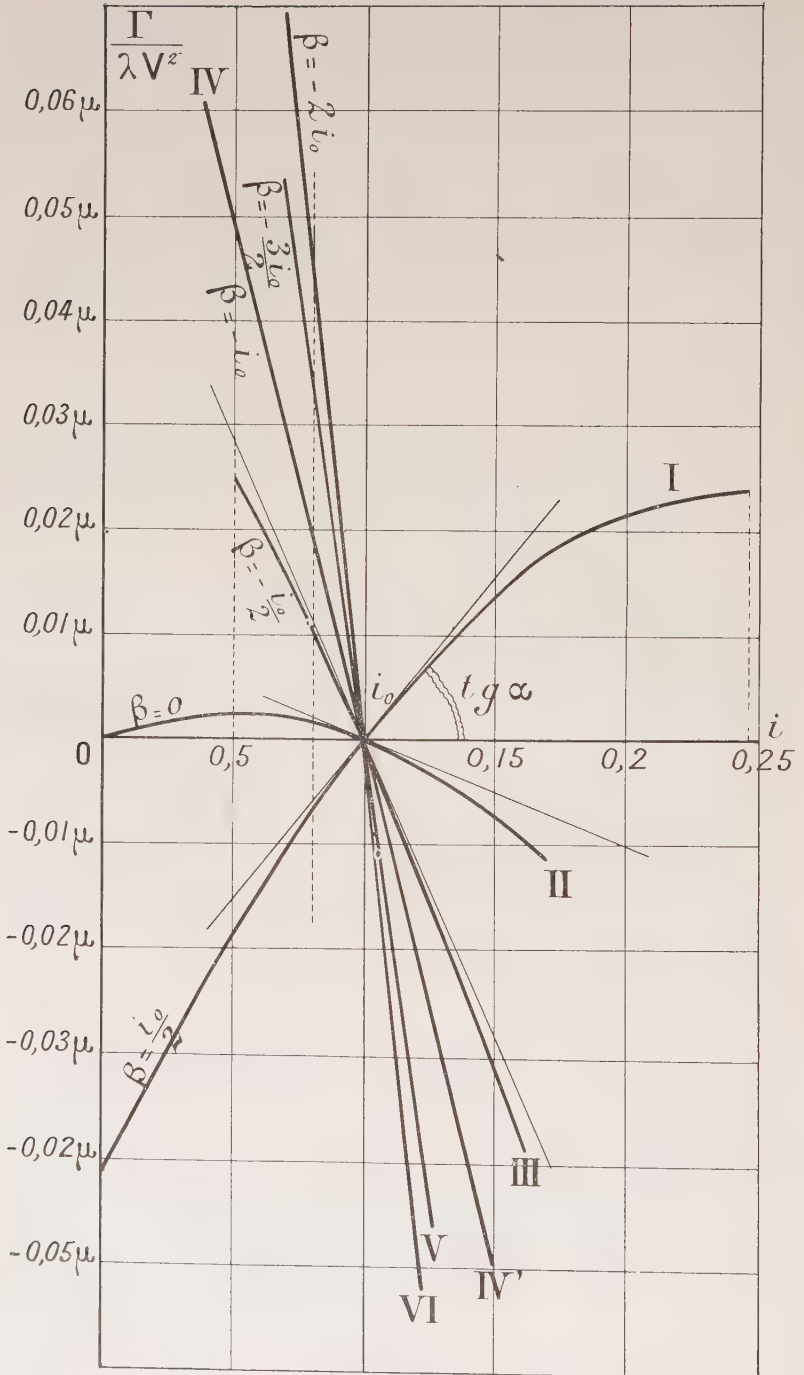
Pour de petites variations de V et de i autour de leurs valeurs V_0 et i_0 , la variation du couple central a pour expression suivant (33a) en se limitant aux termes du premier ordre :

$$\delta\Gamma = - \frac{2M}{V_0} \delta V + \lambda V_0^2 \left\{ a(1 + \rho) - \rho(L + 2\mu_q\beta) - 2i_0(\mu + \rho\mu_q) \right\} \delta i,$$

en remplaçant a par sa valeur (47) nous obtenons :

$$(48) \quad \delta\Gamma = - \frac{2M}{V_0} V \delta \\ + \left\{ \lambda V_0^2 \frac{\rho\mu_q\beta^2(1 - \rho) + \rho\beta[L - 2i_0(\mu + \rho\mu_q)] - i_0^2(1 + \rho)(\mu + \rho\mu_q)}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)} \right. \\ \left. - \frac{M(1 + \rho)}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)} \right\} \delta i.$$

Fig. 15.



Commençons par envisager le cas où $M=0$, c'est-à-dire le cas où la poussée des hélices passe par le centre de gravité de l'appareil. Alors, comme on le voit aisément, $\delta\Gamma$ ne dépend que de δi . La variation du couple central ne dépend dans une première approximation que de la variation de l'angle d'attaque.

Pour bien mettre en relief l'influence de β sur les variations du couple central, commençons par examiner d'abord comment varie Γ en fonction de i pour diverses valeurs particulières de β . Suivant (33 a) pour $M=0$ nous avons

$$(49) \quad \Gamma = \left\{ -i^2(\mu + \rho\mu_q) + i[a(1 + \rho) - \rho(L + 2\mu_q\beta) - \rho\beta(L - a + \mu_q\beta)] \right\} \lambda V^2,$$

équation dans laquelle on doit attribuer à a la valeur (47) avec $M=0$.

Interprétons géométriquement cette équation en prenant $\frac{\Gamma}{\lambda V^2}$ pour ordonnée et i pour abscisse. Cette équation nous représentera alors une famille de paraboles dont β est le paramètre. Il est aisé de voir que toutes ces paraboles ont leurs axes de symétrie parallèles à l'axe des $\frac{\Gamma}{\lambda V^2}$ et passent toutes par le point $\left(i=i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2}=0\right)$. Une série de ces paraboles a été représentée sur la figure 15⁽¹⁾. Il va de soi que seules les parties de ces paraboles situées au voisinage du point $\left(i=i_0; \frac{\Gamma}{\lambda V^2}=0\right)$ sont à considérer.

La parabole I correspond à $\beta = \frac{i_0}{2}$. Pour cet appareil la queue est plus cabrée que la voilure principale. On voit aisément que, quand i décroît à partir de sa valeur i_0 le couple central prend des valeurs négatives, et il prend des valeurs positives quand i croît à partir de sa valeur i_0 . Les variations du couple central sont donc de même signe que les variations de l'angle d'attaque. Le couple central est donc dans ce cas essentiellement déstabilisa-

(¹) Pour le tracé de ces paraboles on a adopté les valeurs particulières suivantes qui représentent une moyenne des valeurs actuellement usitées en aviation. On a pris $i=0,1$ (6°); $L=10\mu$; $\mu=\mu_q$ c'est-à-dire on a considéré la queue et la voilure principale de même profil; $\rho=0,1$ c'est-à-dire la surface efficace de la queue dix fois moindre que celle de la voilure principale. On conçoit aisément que l'allure de ces paraboles ne sera nullement changée si l'on remplace ces données particulières par d'autres de même ordre de grandeur.

teur. Si comme précédemment nous envisageons le coefficient angulaire α de la tangente au point $\left(i = i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0\right)$ le signe de ce coefficient angulaire nous renseigne de suite sur le signe des variations du couple central. Tang α est négatif quand le couple central est stabilisateur et positif dans le cas contraire. La queue plus cabrée que la voilure principale a donc une action complètement défavorable à la stabilité de l'appareil, car le même appareil sans queue avait un couple central stabilisateur (cf. *fig.* 13).

La courbe II correspond à $\beta = 0$. Pour l'appareil considéré la queue est donc parallèle à la voilure principale. Cette parabole est quasi confondue avec la courbe $\frac{\Gamma}{\lambda V^2}$ en fonction de i , pour l'appareil sans queue mais ayant les mêmes caractéristiques (cf. *fig.* 13). Dans ce cas la queue est donc sans influence sur les variations du couple central.

La parabole III a été tracée pour $\beta = -\frac{i_0}{2}$. Elle correspond à l'appareil dont la queue est moins cabrée que la voilure principale, mais reçoit encore le vent sur la même face que cette dernière. Dans ce cas tang α est nettement négatif. Le couple central est donc stabilisateur. Si l'on compare la courbe III à la courbe II on voit que la diminution de l'angle d'attaque de la queue accroît sensiblement les variations du couple central et rend par conséquent la queue plus efficace.

La courbe IV correspondant à $\beta = -i_0$. Pour cette inclinaison, la queue est disposée dans le lit du vent pour l'orientation de régime de l'appareil. Eu égard à la condition $\beta \geq -i$, seule la partie de cette courbe située au-dessus de l'axe des i est à considérer. Cette courbe est tellement étalée au voisinage du point $\left(i = i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0\right)$ qu'elle se confond très sensiblement avec sa tangente en ce point, tangente qui seule a été tracée. Le couple central est stabilisateur et ses variations pour une même variation de i sont encore supérieures au cas III.

Pour pouvoir envisager les cas correspondant à $\beta < -i$, c'est-à-dire quand la queue commence à recevoir le vent sur le dos, nous devons suivant ce que nous avons indiqué page 73 changer dans la formule (49) le signe de μ_7 . C'est d'après cette équation ainsi modifiée qu'on a tracé les courbes qui suivent.

D'abord nous avons la parabole IV qui correspond à $\beta = -i_0$ mais dont seule la partie située sous l'axe des i est à considérer. De cette courbe seule la tangente au point $(i = i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0)$ est figurée, et elle constitue exactement le prolongement de la tangente IV, comme il était aisé de le prévoir en vertu de la continuité du phénomène. Dans ce cas la queue est de même que pour le cas IV disposée dans le lit du vent pour l'orientation de régime de l'appareil; seulement nous envisageons uniquement les variations de l'angle d'attaque pour lesquelles la queue reçoit le vent sur le dos, contrairement au cas IV où elle recevait le vent sur la même face que la voilure principale, c'est-à-dire par en dessous. Le couple central est évidemment stabilisateur.

La courbe V correspond à $\beta = -\frac{3i_0}{2}$, la courbe VI a $\beta = -2i_0$. Seules les tangentes à ces deux courbes au point $(i = i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0)$ ont été représentées. Le couple central est stabilisateur et ses variations croissent à mesure que β , tout en restant négatif, croît en valeur absolue.

Comme au voisinage du point $(i = i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0)$ toutes ces courbes sont très sensiblement confondues avec leurs tangentes en ce point, on peut donc parfaitement caractériser les variations de $\frac{\Gamma}{\lambda V^2}$ pour diverses valeurs de β et pour de petites variations de i autour de sa valeur i_0 , en envisageant simplement les coefficients angulaires $\tan \alpha$ de ces tangentes.

D'après (49) nous avons directement

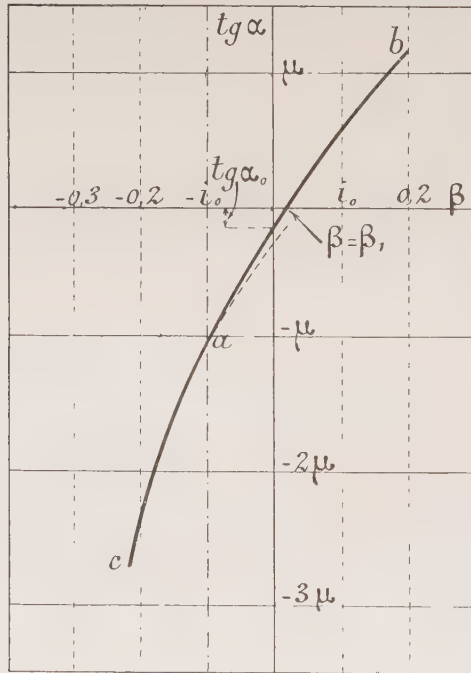
$$(50) \quad \tan \alpha = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\Gamma}{\lambda V^2} \right)_{i=i_0} \\ = \frac{\rho \mu_g \beta^2 (1 - \rho) + \rho \beta [L - \gamma i_0 (\mu + \rho \mu_g)] - i_0^2 (1 + \rho) (\mu + \rho \mu_g)}{i_0 + \rho (i_0 + \beta)},$$

formule dans laquelle on a remplacé, α par sa valeur (47) avec $M = 0$. Cette expression n'est valable que pour $\beta \geq -i$. Pour $\beta \leq -i$ il faut changer le signe de μ_g . On conçoit aisément que $\lambda V^2 \tan \alpha$ n'est autre chose que le coefficient de δi dans l'équation (48) pour $M = 0$.

Si dans l'équation (50) on interprète $\tan \alpha$ comme ordonnée et

β comme abscisse, elle représente pour $\beta \geq -i$ et pour $\beta \leq -i$ deux hyperboles qui pour $\beta = -i_0$ ont un point commun. Sans nous attarder à la discussion de ces courbes, nous produisons sur la figure 16 les parties de ces hyperboles qui sont à considérer ⁽¹⁾ Ces courbes nous donnent le tableau complet de l'influence de β sur les variations du couple central d'un appareil muni d'une

Fig. 16.



queue. La courbe composée de la figure 16 dont la partie ab correspond à $\beta \geq -i$ et la partie ac à $\beta \leq -i$ résume pour ainsi dire

⁽¹⁾ Pour le tracé de la courbe composée de cette figure 16, on a adopté les mêmes données particulières que pour le tracé de la figure 15 lesquelles sont indiquées en note ⁽¹⁾ page 87. L'allure générale de cette figure n'est évidemment en rien modifiée si l'on remplace ces données particulières par d'autres de même ordre de grandeur.

toute la discussion qui précède et nous amène aux conclusions fondamentales suivantes :

1° Tout aéroplane peut être muni d'une queue disposée sous une inclinaison $\beta = \beta_1$, positive et généralement très petite, telle que le couple central de l'appareil reste toujours nul pour toutes les petites variations de i autour de sa valeur i_0 . Cette inclinaison β_1 correspond sur la figure 16 à $\tan \alpha = 0$. Quand un tel appareil a atteint son régime on peut dire qu'il se trouve en équilibre relatif indifférent, puisque le couple central est toujours nul quelle que soit l'orientation de l'appareil au voisinage de son orientation de régime.

2° Quand l'appareil est muni d'une queue plus cabrée que la voilure principale et telle que $\beta > \beta_1$, l'appareil est essentiellement instable, car il est alors toujours sollicité par un couple qui tend à l'éloigner de son orientation de régime sitôt qu'il en est, si peu que ce soit, écarté. Ce couple déstabilisateur est d'autant plus grand pour une même variation de i , que β est plus grand, c'est-à-dire que la queue est plus cabrée. Une queue plus cabrée que la voilure principale a donc une action essentiellement néfaste sur la stabilité de l'appareil.

3° Comme pour $\beta = 0$; $\tan \alpha$ a la même valeur que pour l'appareil sans queue; une queue parallèle à la voilure principale de l'appareil est donc sans influence sur les variations du couple central et par conséquent sur la stabilité de l'appareil.

4° Quand la disposition de la queue de l'appareil est telle que $\beta < \beta_1$, c'est-à-dire que la queue est moins cabrée que la voilure principale le couple central est toujours stabilisateur. Les variations du couple central, qui dans ce cas est toujours un couple de rappel vers l'orientation du régime, pour une même variation de i , sont d'autant plus grandes que β , tout en restant négatif, est plus grand en valeur absolue.

5° La disposition la plus efficace de la queue au point de vue de l'accroissement du couple de rappel de l'appareil est celle où la queue reçoit le vent sur le dos.

On voit ainsi quelle est l'influence considérable de la queue sur les variations du couple central. Par une orientation convenable de la queue on peut toujours obtenir que l'appareil soit sollicité, pour une variation donnée de i , par un couple de rappel qui, pra-

tiquement parlant, peut être rendu aussi grand qu'on veut (1).

Envisageons maintenant le cas général où la poussée des hélices ne passe plus par le centre de gravité de l'appareil. Alors M n'est plus nul. La variation du couple central nous est donnée par l'équation (48) que nous pouvons écrire sous la forme

$$(51) \quad \delta\Gamma = -\frac{2M}{V_0} \delta V + \left[\lambda V_0^2 \tan \alpha - \frac{M(1+\rho)}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)} \right] \delta i.$$

expression dans laquelle $\tan \alpha$ a la même signification que dans la formule (50). Dans ce cas $\delta\Gamma$ dépend tout aussi bien de δV que de δi .

La fraction de la variation du couple central proportionnelle à δi diffère par le terme supplémentaire

$$-\frac{M}{i_0 + \frac{\rho}{1+\rho} \beta} \approx \frac{M}{i_0}$$

(car ρ est généralement petit) de la variation du couple central dans le cas où $M = 0$.

Quand $\tan \alpha$ est négatif, ce qui peut toujours être atteint par une orientation convenable de la queue, comme nous l'avons vu précédemment, et que M est positif, la fraction du couple central proportionnelle à δi est stabilisatrice et elle croît en valeur absolue avec M . La disposition de la poussée Φ des hélices au-dessous du

(1) Pour donner une idée encore plus frappante de l'allure des variations de $\tan \alpha$ représenté en fonction de β sur la figure 16, nous en avons calculé quelques valeurs particulières pour les données de la note (1) de la page 87. Ci-après sont donnés les rapports de $\tan \alpha$ à $\tan \alpha_0$ qui est la valeur de $\tan \alpha$ pour $\beta = 0$.

Pour $\beta = -\frac{i_0}{2},$	$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0} \approx 6$	Pour $\beta = -i_0,$	$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0} \approx 11$
Pour $\beta = -\frac{3i_0}{2},$	$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0} \approx 17$	Pour $\beta = -2i_0,$	$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0} \approx 23$

Ainsi donc, quand un appareil est muni d'une queue disposée sous un angle d'attaque deux fois moindre que celui de la voilure principale, son couple de rappel est environ six fois plus grand que celui d'un appareil dépourvu de queue. Quand la queue est disposée dans le lit du vent, le couple central est environ décuplé relativement à l'appareil sans queue. Le couple de rappel croît donc très rapidement à mesure que la queue s'efface et continue à croître quand la queue reçoit le vent sur le dos.

centre de gravité de l'appareil accroît donc favorablement les variations du couple central proportionnelles à la variation de l'angle d'attaque.

Nous allons maintenant examiner quelle est l'influence de la queue sur les variations du couple central quand on part de l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression.

2° DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT INVERSE DU CENTRE DE PRESSION.

36. Comme nous n'avons qu'à refaire toute la discussion qui précède en partant des formules (38 a) et (38 b) au lieu de (33 a) et (33 b), qui d'ailleurs ne diffèrent de ces dernières que par les signes α , μ et μ_q , nous nous contenterons de reproduire brièvement les principaux points de la discussion et d'en fournir les résultats généraux.

Pour l'appareil muni d'une queue et dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression le couple central a pour expression :

Pour $\beta \geq -i$

$$(38 a) \quad \Gamma = \left\{ i^2(\mu + \rho \mu_q) - i[\alpha(1 + \rho) + \rho(L - 2\mu_q \beta)] - \rho\beta(L - \mu_q \beta + \alpha) \right\} \lambda V^2 + M.$$

Pour $\beta \leq -i$ il suffit dans cette dernière formule de modifier le signe de μ_q .

La condition que $\Gamma = 0$ pour $i = i_0$ nous fixe la position relative du centre de gravité de tout l'appareil. Nous avons :

Pour $\beta \geq i$

$$(52) \quad \alpha = \frac{-\frac{M}{\lambda V^2} + \mu i_0^2 - \rho(i_0 + \beta)[L - \mu_q(i_0 + \beta)]}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)},$$

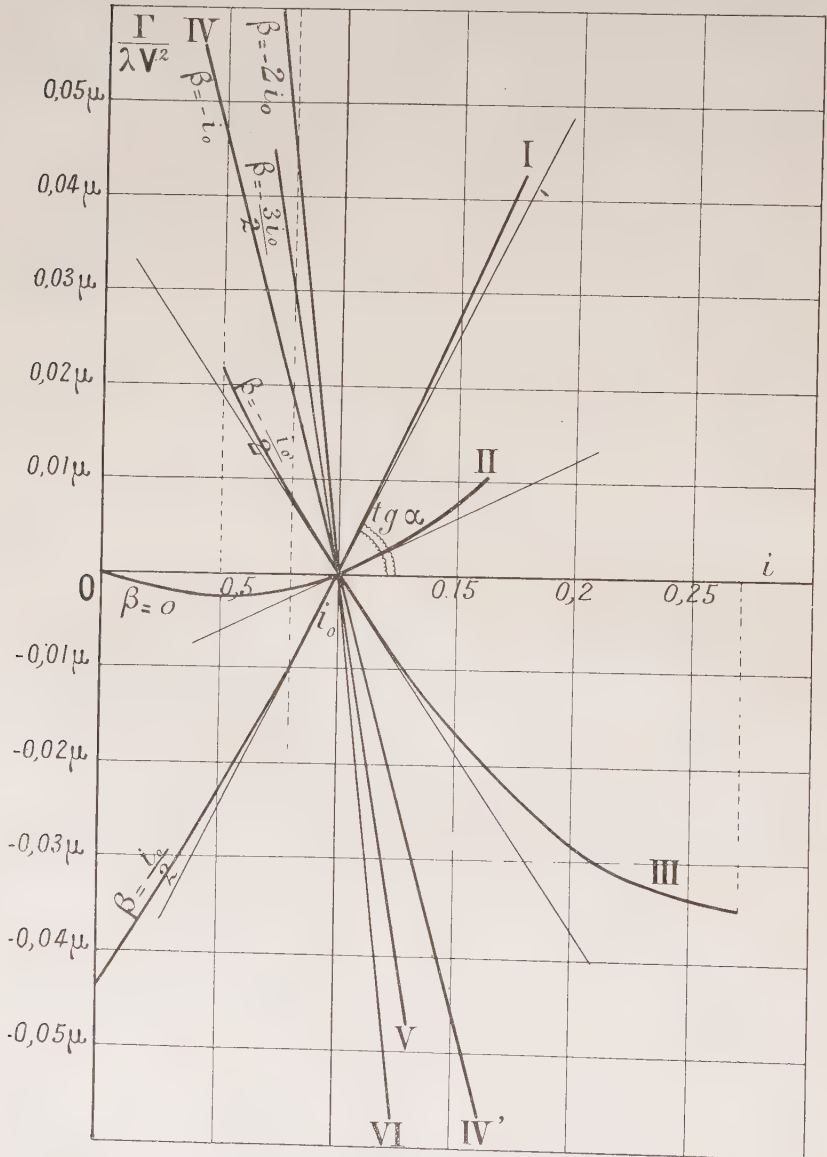
Pour $\beta \leq -i$ il suffit de remplacer μ_q par $-\mu_q$.

La variation du couple central, a pour expression d'après l'équation (38 a)

$$(53) \quad \partial \Gamma = -\frac{\lambda M}{V_0} \partial V - \left\{ \lambda V_0^3 \frac{\rho \mu_q \beta^2(\rho - 1) + \rho\beta[L + 2i_0(\mu + \rho \mu_q)] + i_0^2(1 + \rho)(\mu + \rho \mu_q)}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)} - \frac{M(1 + \rho)}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)} \right\} \partial i$$

Équation dans laquelle on a substitué α par sa valeur (52).

Fig. 17.



Considérons d'abord le cas où M est nul. Alors $\partial\Gamma$ ne dépend que de ∂i . Commençons d'abord comme précédemment à étudier

les variations de $\frac{\Gamma}{\lambda V^2}$ en fonction de i , suivant (38a), pour diverses valeurs particulières de β . L'équation (38a) interprétée géométriquement représente une famille de paraboles dont une série a été représentée sur la figure 17 (1) (cf. fig. 15).

Le parabole I a été tracée pour $\beta = \frac{i_0}{2}$. Le couple central est essentiellement, déstabilisateur, tang α étant positif. En comparant cet appareil à l'appareil sans queue et ayant les mêmes caractéristiques (voir fig. 14), on voit que la queue quand elle est plus cabrée que la voilure principale a une action néfaste sur la stabilité de l'appareil puisqu'elle rend les variations du couple central plus brusques tout en laissant ce dernier déstabilisateur.

La courbe II correspond à $\beta = 0$. Cette courbe est quasi confondue avec la parabole de la figure 14 pour l'appareil analogue mais sans queue. La queue est donc dans ce cas sans influence sur les variations du couple central. L'appareil reste instable.

La courbe III correspond à $\beta = -\frac{i_0}{2}$. On voit de suite qu'une queue moins cabrée que la voilure principale rend le couple central stabilisateur. Ainsi disposée la queue a donc une action favorable sur la stabilité de l'appareil.

La courbe IV correspond à $\beta = -i_0$. En effaçant la queue on accroît donc son action favorable au point de vue de la stabilité de l'appareil.

Toutes ces courbes correspondant au cas $\beta \geq i$. Pour pouvoir envisager le cas de $\beta \leq i$ il suffit dans (38a) de remplacer μ_q par $-\mu_q$. C'est d'après l'équation (38a) ainsi modifiée qu'ont été tracées les paraboles qui suivent.

La parabole IV' a une tangente commune avec IV au point $(i = i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0)$ qui seule a été représentée et correspond à $\beta = -i_0$ mais pour $\beta \leq -i$.

Les courbes V et VI correspondent respectivement à $\beta = -\frac{3i_0}{2}$ et $\beta = -2i_0$. On voit ainsi que l'action favorable de la queue au point de vue de la stabilité de l'appareil croît à mesure que β tout en étant négatif, croît en valeur absolue.

(1) Les courbes de la figure 17, ont été tracées d'après les mêmes données particulières que celles de la figure 15, lesquelles sont indiquées en note (1) page 87.

Comme toutes ces courbes sont très étalées au voisinage du point $\left(i=i_0, \frac{\Gamma}{\lambda V^2}=0\right)$ les coefficients angulaires des tangentes à ces courbes en ce point, peuvent parfaitement caractériser les variations de Γ pour de petites variations de i autour de i_0 .

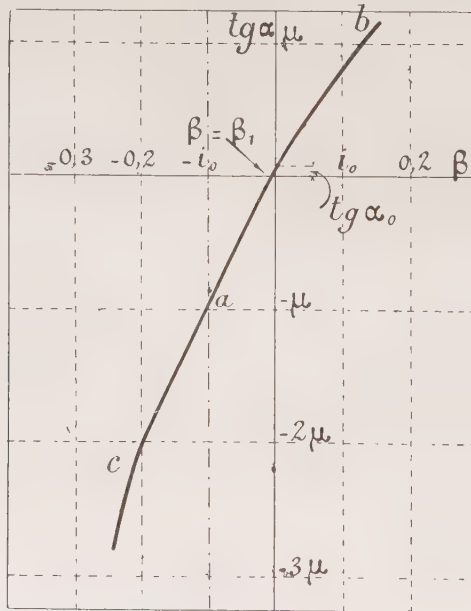
Ces coefficients angulaires ont pour expression :

Pour $\beta \geq -i$

$$(54) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang} \alpha &= \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\Gamma}{\lambda V^2} \right)_{i=i_0} \\ &= \frac{\rho \mu_q \beta^2 (\rho - 1) + \rho \beta [L + 2 i_0 (\mu + \rho \mu_q)] + i_0^2 (1 + \rho) (\mu + \rho \mu_q)}{i_0 - \rho (i_0 + \beta)} \end{aligned}$$

Pour $\beta \leq -i$ il suffit de remplacer μ_q par $-\mu_q$.

Fig. 18.



Cette équation interprétée géométriquement en prenant $\operatorname{tang} \alpha$ pour ordonnée et β pour abscisse représente deux branches d'hyperboles. Sans nous attarder à la discussion de cette équation, nous nous contentons de produire sur la figure 18 la partie à considérer de la courbe composée définie par l'équation (54) et dont

l'arc ab correspond à $\beta \geq i$ et l'arc ac à $\beta \leq -i$. Cette courbe nous donne le tableau complet des résultats de cette discussion, et des conclusions tout à fait analogues à celles qui sont formulées page 91 relativement à la figure 16 peuvent être tirées. La principale de ces conclusions est qu'en munissant un appareil d'une queue moins cabrée que sa voilure principale et telle que $\beta < \beta_1$ (voir *fig.* 18; β_1 est généralement un très petit angle négatif), on peut rendre le couple central de l'appareil stabilisateur et pour une variation donnée de i rendre ses variations pratiquement aussi grandes que l'on veut.

Ainsi donc dans l'hypothèse du déplacement inverse du centre de pression, de même que dans le cas du déplacement direct, une queue moins cabrée que la voilure principale rend le couple central stabilisateur. Toutefois les ordonnées de la courbe de la figure 18 pour une même valeur de β sont inférieures aux ordonnées de la courbe de la figure 16.

Considérons maintenant le cas de M non nul. La variation du couple central dépend dans ce cas tout aussi bien de la variation de la vitesse de l'appareil que de la variation de son angle d'attaque. Eu égard à la relation (54) l'équation (53) peut être mise sous la forme

$$(55) \quad \delta\Gamma = -\frac{2M}{V_0} \delta V + \left[\lambda V_0^2 \tan \alpha - \frac{M(1+\rho)}{i_0 + \rho(i_0 + \beta)} \right] \delta i.$$

Cette équation est tout à fait analogue à l'équation (51) seulement, ici $\tan \alpha$ a une valeur différente. Dans tous les cas par une orientation convenable de la queue $\tan \alpha$ peut être rendu négatif.

Toute la discussion précédente relative à la queue d'un aéroplane nous amène aux conclusions fondamentales suivantes :

37. Le rôle de la queue d'un aéroplane. — L'adjonction d'une queue à un aéroplane modifie très notablement le couple central de l'appareil. Toutefois ce ne sont que les variations du couple central proportionnelles à la variation de l'angle d'attaque qui sont influencées par la présence d'une queue. Par conséquent quand la poussée des hélices passe par le centre de gravité de l'appareil tout le couple central de l'appareil est modifié par une queue, tandis que quand Φ ne passe pas par G il n'y a que la fraction du

couple central proportionnelle à δi qui soit modifiée. Toutes les conclusions qui suivent se rapportent à tout le couple central quand Φ est supposé passer par G et à la fraction du couple central proportionnelle à δi quand Φ ne passe pas par G.

Indépendamment de toute hypothèse sur le sens de déplacement du centre de pression, on peut toujours par une orientation convenable de la queue rendre le couple central de l'aéroplane stabiliseur. Il suffit pour cela que la queue soit moins cabrée que la voilure principale de l'appareil.

En effaçant plus ou moins la queue on peut faire varier dans d'assez larges limites la valeur du couple de rappel, pour une variation donnée de l'angle d'attaque, qui sollicite l'appareil quand ce dernier est écarté de son orientation de régime. Les figures 15, 16, 17 et 18 illustrent quantitativement la question.

L'orientation la plus efficace de la queue au point de vue de la grandeur des variations du couple central est celle quand la queue reçoit le vent sur le dos. Si par exemple, on adopte pour la queue un profil incurvé, cette dernière devra être disposée comme indiqué schématiquement sur la figure 19 ci-contre pour produire son

Fig. 19.



action la plus efficace au point de vue des variations du couple central. On pourrait objecter qu'une telle disposition de la queue produit une perte de sustentation, mais si l'on a soin d'adopter un faible angle d'attaque pour la queue, la perte en sustentation sera très faible tandis que le gain en couple de rappel considérable.

Toutes les conclusions qui précèdent sont en concordance complète avec tout ce que la pratique de l'aviation nous a appris jusqu'à ce jour sur le rôle de la queue. Effectivement tous les appareils qui se sont montrés avoir une stabilité longitudinale plus ou moins grande avaient leurs queues toujours moins cabrées que leur voilure principale. Cette discussion ne fait que compléter les résultats acquis par l'expérience en nous permettant d'établir la disposition la plus efficace de la queue. Quelles que soient les lois que les

expériences futures préciseront pour le déplacement du centre de pression, on pourra toujours en employant pour la queue, soit des surfaces planes soit des surfaces incurvées, établir des appareils ayant un couple central stabilisateur.

Il ne faut pas s'empresse de tirer de cette discussion quelques conséquences relatives à la stabilité de l'aéroplane. Seule, l'étude du mouvement de l'aéroplane peut nous apprendre dans quelle mesure il peut être avantageux, que les variations du couple central aient telle ou telle autre valeur.

Nous allons maintenant passer à l'étude de l'empennage horizontal d'avant.

Variations du couple central pour les appareils munis d'empennages horizontaux d'avant.

Comme pour l'étude des variations du couple central pour les appareils munis d'empennages horizontaux d'avant, nous n'avons qu'à suivre exactement la même marche que précédemment dans le cas d'appareils munis de queues, nous serons brefs dans cette discussion et nous nous contenterons d'en reproduire seulement les principaux résultats.

1^o DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT DIRECT DU CENTRE DE PRESSION.

38. Toutes les formules qui suivent se rapportent au cas de $\beta \geq -i$. Pour passer au cas de $\beta \leq -i$ il suffit de remplacer μ_a par $-\mu_a$.

Dans ce cas le couple central a suivant (35 a) pour expression :

$$(35 a) \quad \Gamma = \frac{1}{2} - i^2 (\mu + \rho' \mu_a) + i [\alpha (1 + \rho') + \rho' (L' - 2 \mu_a \beta')] + \rho' \beta (L' + \alpha - \mu_a \beta') (\lambda V^2 + M).$$

La position relative du centre de gravité de tout l'appareil nous est donnée par la condition que $\Gamma = 0$ pour $i = i_0$. Ce qui nous donne :

$$(56) \quad \alpha = \frac{-\frac{M}{\lambda V^2} + \mu i_0^2 - \rho' (i_0 + \beta') [L' - \mu_a (i_0 + \beta')]}{i_0 + \rho' (i_0 + \beta')}.$$

La variation du couple central a pour expression

$$(57) \quad \delta\Gamma = -\frac{2M}{V_0} \delta V + \left\{ \lambda V_0^2 \frac{\beta'^2 \rho' \mu_\alpha (1 - \rho') - \beta' \rho' [L' + 2i_0(\mu + \rho' \mu_\alpha) - i_0^2(1 + \rho')(\mu + \rho' \mu_\alpha)]}{i_0 + \rho'(i_0 + \beta')} - \frac{M(1 + \rho')}{i_0 + \rho'(i_0 + \beta')} \right\} \delta i.$$

Formule que l'on peut écrire sous la forme,

$$(58) \quad \delta\Gamma = -\frac{2M}{V_0} \delta V + \left[\lambda V_0^2 \tan \alpha - \frac{M(1 + \rho')}{i_0 + \rho'(i_0 + \beta')} \right] \delta i,$$

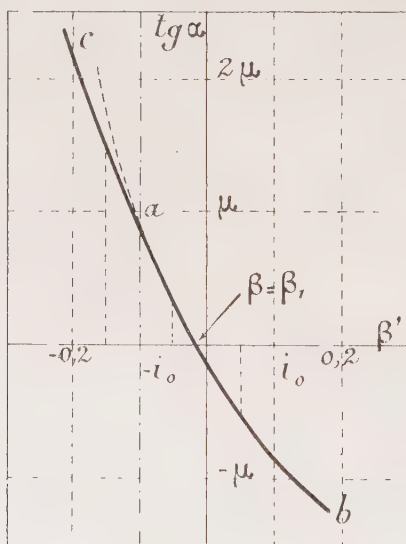
où l'on a

$$(59) \quad \tan \alpha = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\Gamma}{\lambda V^2} \right)_{i=i_0} = \frac{\beta'^2 \rho' \mu_\alpha (1 - \rho') - \beta' \rho' [L' + 2i_0(\mu + \rho' \mu_\alpha) - i_0^2(1 + \rho')(\mu + \rho' \mu_\alpha)]}{i_0 + \rho'(i_0 + \beta')}.$$

Dans le cas de $M = 0$, l'équation (58) se réduit à

$$\delta\Gamma = \lambda V_0^2 \tan \alpha \delta i$$

Fig. 20.



Pour nous rendre dans ce cas compte de l'influence β' sur la variation du couple central, il nous suffira d'examiner les variations de

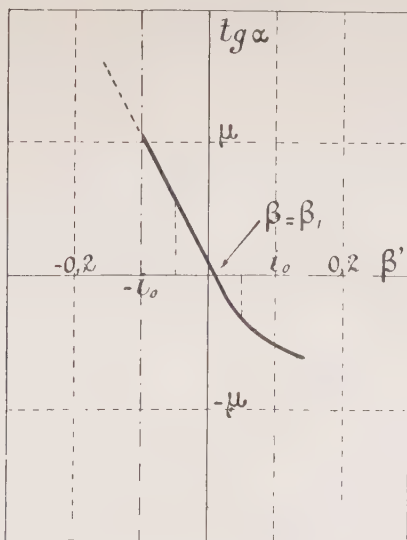
$\tan \alpha$ en fonction de β' . Nous nous contentons de produire sur la figure 20 la courbe composée définie par l'équation (59). La branche ab correspond à $\beta \geq -i$, la branche ac à $\beta \leq -i$.

En se rappelant que $\tan \sigma$ doit être négatif pour que le couple central soit stabilisateur, on voit, à la simple inspection de cette figure, que pour que l'appareil possède un couple central stabilisateur, il faut que son empennage horizontal d'avant soit plus cabré que sa voilure principale.

2° DANS L'HYPOTHÈSE DU DÉPLACEMENT INVERSE DU CENTRE DE PRESSION.

39. Pour passer des formules relatives au déplacement direct du centre de pression aux formules relatives au déplacement inverse il suffit, d'après ce que nous avons indiqué page 76, de

Fig. 21.



changer les signes de a , μ et μ_a , c'est pourquoi nous nous contenterons simplement de produire la représentation graphique de l'équation (59) ainsi modifiée et que la figure 21 ⁽¹⁾ nous donne

(¹) La figure 21, ainsi que la figure 20, a été tracée par les mêmes données particulières que toutes les figures de ce chapitre.

On voit aisément que dans ce cas par l'emploi d'un empennage horizontal d'avant plus cabré que la voilure principale on peut, de même que dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression, rendre le couple central de l'appareil stabilisateur.

En définitive, les conclusions suivantes peuvent être formulées relativement à l'empennage horizontal d'avant.

40. Rôle de l'empennage horizontal d'avant d'un aéroplane.

— L'empennage horizontal d'avant de même que la queue modifie très sensiblement les variations du couple central de l'aéroplane.

Toutes les conclusions qui suivent se rapportent soit à tout le couple central, soit à sa fraction proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque suivant que l'on considère la poussée des hélices passant par le centre de gravité de l'appareil ou non.

Quelle que soit la loi adoptée pour le déplacement du centre de pression, l'empennage horizontal d'avant peut toujours être disposé sous une inclinaison telle que l'appareil possède un couple central stabilisateur. Il faut, pour cela, que l'empennage horizontal d'avant soit plus cabré que la voilure principale de l'appareil. Pour une même variation de i autour de sa valeur i_0 , la variation du couple central croît rapidement avec β' . Pour une certaine valeur de $\beta' = \beta_1$, l'appareil peut être rendu indifférent, c'est-à-dire n'être sollicité par aucun couple quand il sera écarté de son orientation de régime. Pour $\beta' > \beta_1$, le couple central est stabilisateur, pour $\beta' < \beta_1$, le couple central est déstabilisateur. Pour $\beta' = 0$ l'empennage horizontal d'avant est sans influence sur les variations du couple central.

On voit ainsi que, autant par l'emploi d'une queue que par l'emploi d'un empennage horizontal d'avant, on peut toujours faire en sorte que l'aéroplane possède un couple central stabilisateur. La question se pose donc, lequel de ces deux dispositifs doit être préféré? Comme l'empennage horizontal d'avant doit toujours être disposé sous un angle d'attaque beaucoup plus grand qu'une queue pour avoir une action favorable, toute préférence doit être accordée à la queue qui présente ainsi une moindre résistance à l'avancement. Voilà pourquoi, dans la pratique de l'aviation, les queues se sont naturellement imposées.

41. Remarques générales relatives aux empennages horizontaux. — La discussion précédente relative aux empennages horizontaux contient tous les éléments nécessaires pour se rendre quantitativement compte de l'influence des dimensions de l'empennage horizontal (ρ) et de son écartement de la voilure principale de l'appareil (L) sur les variations du couple central. Nous ne nous arrêtons pas sur cette question. Il est fort aisé de prévoir que l'efficacité d'un empennage horizontal, quand son action est favorable à la stabilité de l'appareil, croît avec ρ et L .

Si l'on s'en rapporte à toute la discussion qui précède relative aux empennages horizontaux, on voit que, pour de petites variations d'orientation de l'aéroplane autour de son orientation de régime, le couple central est dans une première approximation une fonction linéaire des variations de sa vitesse et de son angle d'attaque et que nous pouvons écrire sous la forme (1) [voir formules (51), (55) et (58)]

$$\Gamma = \frac{2M}{V_0} (V - V_0) - V_0^2 \left(\frac{M}{V_0^2 i_0} - \lambda \tan \alpha \right) (i - i_0).$$

Dans cette formule V_0 et i_0 sont les valeurs de la vitesse et de l'angle d'attaque de l'appareil pour son orientation de régime et V et i les valeurs de ces mêmes quantités pour une orientation de l'appareil faiblement écartée de son régime. Pour $V = V_0$ et $i = i_0$ le couple central est évidemment nul. Cette dernière formule peut encore s'écrire

$$(60) \quad \Gamma = \left(c - \frac{h}{2i_0} \right) V_0^2 (i_0 - i) + h V_0 (V - V_0),$$

en posant

$$(61) \quad c = -\lambda \tan \alpha$$

et

$$(62) \quad h = -\frac{2M}{V_0^2}.$$

Pour $M = 0$ le couple central se réduit à

$$(63) \quad \Gamma = c V_0^2 (i_0 - i).$$

(1) En considérant ρ et β petits, comme ils le sont dans la grande majorité des cas de la pratique de l'aviation.

Ces formules (60) et (63) nous donnent indépendamment de toute hypothèse sur le sens de déplacement du centre de pression, l'expression du couple central de tout l'appareil, empennages horizontaux compris. D'après la formule (60), la fraction du couple central proportionnelle à $(i_0 - i)$ et, d'après la formule (63), tout le couple central, sont stabilisateurs quand $\left(c - \frac{h}{2i_0}\right)$ et c sont positifs.

Pour le calcul des coefficients c et h il nous suffit de connaître en outre les caractéristiques du régime de l'appareil, la décentration des hélices et la valeur de $\tan \alpha$. Les formules telles que (50), (54) et (59) nous permettent de calculer $\tan \alpha$, dont la valeur dépend des caractéristiques du régime de l'appareil, et de L , ρ et surtout de β . Le régime de l'appareil étant déterminé, si l'on se fixe encore L et ρ par exemple, on peut toujours, en faisant varier β , faire varier $\tan \alpha$ dans d'assez larges limites et avec lui le coefficient c .

En définitive, nous connaissons parfaitement de quels facteurs et dans quelle mesure dépendent les variations du couple central d'un aéroplane. Pour de petites oscillations de l'appareil autour de son orientation de régime, le couple central de tout l'appareil peut être exprimé par les formules (60) ou (63), dans lesquelles la valeur du coefficient c peut varier dans d'assez larges limites, suivant les dimensions, l'éloignement et surtout l'inclinaison de l'empennage horizontal de l'appareil.

Nous terminerons cette question du couple central en examinant le rôle du gouvernail de profondeur.

42. La manœuvre du gouvernail de profondeur. — Le gouvernail de profondeur sert à modifier l'angle d'attaque de l'appareil. Nous allons brièvement étudier sa manœuvre. Nous nous contenterons d'envisager une disposition particulière du gouvernail de profondeur, qui est d'ailleurs la disposition qu'on rencontre le plus communément dans la pratique de l'aviation. Tout autre disposition du gouvernail horizontal pourra être étudiée d'une manière tout à fait analogue.

Considérons un appareil muni d'une queue qui, pour l'orientation de régime de ce dernier, est disposée dans le lit du vent. Elle

est donc caractérisée dans le langage de nos notations par $\beta = -i_0$, i_0 étant l'angle d'attaque du régime normal. Notre aéroplane est, en outre, muni d'un gouvernail de profondeur disposé à l'avant, lequel, pour l'orientation de régime de l'appareil, est aussi disposé dans le lit du vent ⁽¹⁾. Remarquons de suite que l'adjonction, à un appareil d'un gouvernail de profondeur, modifie très notablement les variations de son couple central, et c'est une question que nous examinerons dans le paragraphe suivant. Pour le moment, nous voulons seulement examiner comment varie l'angle d'attaque de l'appareil quand on fait varier l'inclinaison de son gouvernail de profondeur. Nous admettrons que la poussée des hélices passe par le centre de gravité de l'appareil, et nous nous placerons dans l'hypothèse du déplacement direct du centre de pression. Le sens du déplacement du centre de pression et la décentration des hélices étant sans influence notable sur la manœuvre du gouvernail de profondeur.

L'allure générale du phénomène est aisée à prévoir. L'appareil se cabrera quand on braquera vers le haut son gouvernail de profondeur, et piquera du nez quand on inclinera le gouvernail vers le bas. De sorte que la queue et le gouvernail horizontal, pour la disposition particulière que nous envisageons, recevront toujours le vent sur leur même face.

Le couple central de notre appareil est la somme des couples centraux dus à sa voilure principale, à sa queue et à son gouvernail de profondeur.

D'après les formules que nous avons données pages 72 et 73, on trouve aisément que le couple central de tout l'appareil a pour expression pour $M = 0$:

Pour $\beta \geq -i$; $\beta' > -i$:

$$\begin{aligned}
 (64\ a) \quad \frac{\Gamma}{\lambda V^2} &= \frac{\Gamma_a}{\lambda V^2} + \frac{\Gamma_v}{\lambda V^2} + \frac{\Gamma_q}{\lambda V^2} \\
 &= \rho'(i + \beta')[L' - \mu_a(i + \beta') + a] + i(\alpha - \mu i) \\
 &\quad - \rho(i + \beta)[L + \mu_q(i + \beta) - a].
 \end{aligned}$$

(1) Il va de soi que la queue et le gouvernail de profondeur doivent, dans ce cas, être constitués par des plans minces pour pouvoir travailler dans des conditions semblables par leurs deux faces.

Pour $\beta \leq -i; \beta' \leq -i:$

$$(64\ b) \quad \frac{\Gamma}{\lambda V^2} = \rho'(i + \beta') [L' + \mu_a(i + \beta') + a] + i(a - \mu i) \\ - \rho(i + \beta) [L - \mu_q(i + \beta) - a].$$

Dans ces équations, ρ' , β' , L' , μ_a se rapportent au gouvernail de profondeur; β' caractérise l'inclinaison du gouvernail de profondeur, c'est donc une des variables de la question; pour l'orientation moyenne du gouvernail, β' a pour valeur: $\beta' = \beta'_m = -i_0$. ρ , β , L , μ_q se rapportent à la queue. β est constant et toujours égal à $\beta = -i_0$.

La position relative du centre de gravité G de tout l'appareil nous est fixée par la condition que le régime normal doit être atteint pour que $i = i_0$; $\beta' = \beta'_m$, c'est-à-dire que $\frac{\Gamma}{\lambda V^2} = 0$, pour ces valeurs de i et de β' . Cette condition, dans les deux cas (64 a) et (64 b) nous donne

$$a = \mu i_0.$$

Quand on fait varier β' à partir de sa valeur moyenne β'_m , à chaque nouvelle valeur de β' , correspond une nouvelle valeur de l'angle d'attaque i du nouveau régime qui s'établit, et qui sera un régime de montée ou de descente, si la poussée des hélices est laissée invariable. Cette nouvelle valeur de i nous sera donnée par la condition que le couple central doit rester nul pour la nouvelle valeur de β' . Ainsi l'équation $\Gamma = 0$ nous donnera le système de paires de valeurs de β' et de i qui se correspondent mutuellement. Nous avons ainsi:

Pour $\beta \geq -i; \beta' \geq -i$

$$(65\ a) \quad \rho'(i + \beta') [L' - \mu_a(i + \beta') + a] \\ + i(a - \mu i) - \rho(i + \beta) [L - \mu_q(i + \beta) - a] = 0.$$

Pour $\beta \leq -i; \beta' \leq -i$

$$(65\ b) \quad \rho'(i + \beta') [L' + \mu_a(i + \beta') + a] \\ + i(a - \mu i) - \rho(i + \beta) [L - \mu_q(i + \beta) - a] = 0,$$

équations qui nous donnent la dépendance réciproque de i et de β' . Comme la vitesse V n'intervient pas dans ces équations (65 a) et (65 b), on voit que l'efficacité de la manœuvre du gouvernail de

profondeur est indépendante de la vitesse de l'appareil ⁽¹⁾. Évidemment, seulement toutefois pour des valeurs de la vitesse de l'appareil voisines de la vitesse de régime, car autrement les conditions du problème sont par trop modifiées, et les formules (65 a) et (65 b) inapplicables.

Pour suivre plus aisément l'allure des variations de i en fonction de β' , interprétons géométriquement ces équations en considérant β' comme abscisse et i comme ordonnée. L'équation (65 a) représente alors une ellipse, l'équation (65 b) une hyperbole, lesquelles courbes ont une tangente commune au point

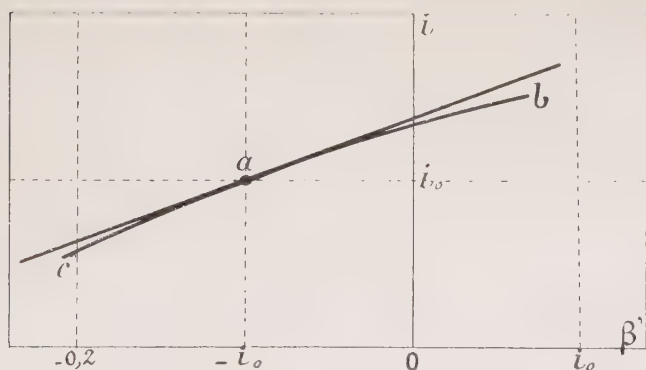
$$(i = i_0; \beta' = \beta'_m = -i_0)$$

et dont le coefficient angulaire a pour valeur

$$(66) \quad \left. \frac{\partial i}{\partial \beta'} \right|_{\beta' = -i_0} = \frac{\rho'(L' + a)}{\rho L - \rho' L' - a(1 + \rho + \rho') + 2\mu i_0}.$$

Les parties à considérer des courbes (65 a) et (65 b) sont repré-

Fig. 22.



sentées sur la figure 22, l'arc ab correspond à l'équation (65 a), l'arc ac à l'équation (65 b) ⁽²⁾. Comme ces courbes sont assez

⁽¹⁾ Quand la poussée des hélices ne passe pas, par le centre de gravité de l'appareil, l'efficacité de la manœuvre du gouvernail horizontal dépend de la vitesse de l'appareil.

⁽²⁾ Pour le tracé de ces courbes on a adopté les données particulières indiquées en Note ⁽¹⁾ page 87. On a considéré en outre $L' = \frac{L}{2}$; $\rho' = \frac{\rho}{2}$; $\mu = \mu_a = \mu_q \cong 1$. Il va de soi que l'allure générale de ces courbes n'est en rien modifiée quand on remplace ces données par d'autres de même ordre de grandeur.

étalées au voisinage du point ($i = i_0$, $\beta' = i_0$), elles peuvent, dans une première approximation, être remplacées au voisinage de ce point par leur tangente commune. La variation de l'angle d'attaque de l'aéroplane est donc, dans une première approximation, une fonction linéaire de l'inclinaison β' de son gouvernail horizontal. On peut donc poser, pour de petites variations de l'angle d'attaque autour de sa valeur de régime normal i_0 :

$$i - i_0 = g(\beta' - \beta'_m),$$

ou bien encore

$$(67) \quad i = i_0 + g(\beta' - \beta'_m),$$

en g est la constante du gouvernail de profondeur, égale, comme il est aisé de le voir, à $\left. \frac{di'}{d\beta'} \right|_{\beta' = i_0}$ donné par l'expression (66). Comme dans la pratique du vol de l'aéroplane, seules des petites variations de l'angle d'attaque interviennent, la formule (67) rend donc compte, avec une approximation pratiquement suffisante, de la manœuvre du gouvernail horizontal.

La figure 22 et l'équation (67) qui en est l'expression analytique, dans une première approximation, au voisinage du point ($i = i_0$, $\beta' = i_0$), nous donnent la graduation complète du gouvernail de profondeur, et nous permettent de déterminer quelle inclinaison on doit donner au gouvernail de profondeur pour réaliser tel ou tel autre angle d'attaque de l'aéroplane.

43. Influence de la manœuvre du gouvernail de profondeur sur les variations du couple central. — Continuons toujours à envisager un aéroplane muni d'une queue disposée dans le lit du vent et d'un gouvernail de profondeur situé à l'avant et dont la poussée des hélices passe par le centre de gravité. Examinons pour cet aéroplane les variations de son couple central pour de petites oscillations de l'appareil autour de chacun des régimes qui correspondent aux différentes inclinaisons β' du gouvernail de profondeur.

Le couple central de l'appareil nous est donné par les équations (64a) et (64b) et les systèmes de valeurs de i et de β' qui se correspondent mutuellement quand on manœuvre le gouvernail horizontal nous sont données par les équations (65a) et (65b).

En employant le langage de nos notations nous pouvons dire que $\tan \alpha$ caractérise les variations du couple central pour de petites variations de l'angle d'attaque autour de sa valeur de régime.

Nous n'avons donc, pour étudier ces variations du couple central, qu'à calculer $\tan \alpha$ pour les systèmes de valeurs de i et de β' qui se correspondent mutuellement. Nous obtenons ainsi :

Pour $\beta'_+ = i; \beta'_- = -i :$

$$(68a) \quad \tan \alpha = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\Gamma}{\lambda V^2} \right) \\ = \sqrt{\frac{[\rho'(L + 2\mu_a \beta'_+ + \alpha) - \rho(L + 2\mu_g \beta'_- - \alpha) + \alpha]^2}{+ 4(\mu + \rho\mu_g + \rho\mu_a)[\rho'\beta'_+(L + \mu_a \beta'_+ + \alpha) - \rho\beta'_-(L + \mu_g \beta'_- - \alpha)]}}.$$

Pour $\beta'_+ = -i; \beta'_- = i :$

$$(68b) \quad \tan \alpha = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\Gamma}{\lambda V^2} \right) \\ = \sqrt{\frac{[\rho'(L + 2\mu_a \beta'_+ + \alpha) - \rho(L + 2\mu_g \beta'_- - \alpha) + \alpha]^2}{+ 4(\mu - \rho\mu_g - \rho\mu_a)[\rho'\beta'_+(L + \mu_a \beta'_+ + \alpha) - \rho\beta'_-(L + \mu_g \beta'_- - \alpha)]}}.$$

équations dans lesquelles on a remplacé i par sa valeur en fonction de β' tirée des équations (65a) et (65b).

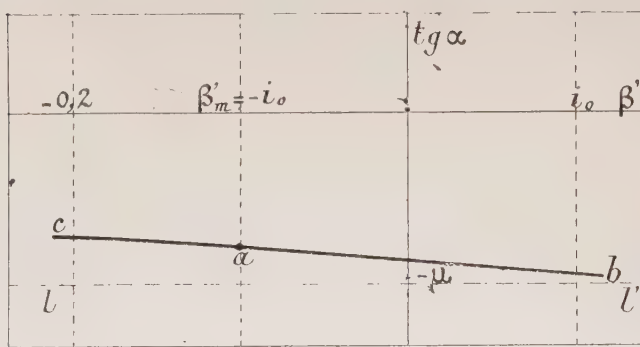
Pour suivre plus aisément l'allure des variations $\tan \alpha$ en fonction de β' , interprétons ces équations géométriquement en prenant $\tan \alpha$ pour ordonnée et β' pour abscisse. Les parties à considérer des courbes représentées par les équations (68a) et (68b) sont données sur la figure 23 ⁽¹⁾. L'arc ab (arc d'ellipse) correspond à l'équation (68a), l'arc ac (arc d'hyperbole) correspond à l'équation (68b). Le point a est un point d'intersection des deux courbes. On a porté sur la même figure pour la comparaison la droite ll' dont la distance à l'axe des β' est égale à la valeur de $\tan \alpha$ pour le régime caractérisé par $i = i_0$, pour l'appareil que nous considérons, mais dénué de gouvernail de profondeur.

La figure 23 nous montre d'abord que la simple adjonction à un appareil d'un gouvernail de profondeur placé à l'avant dans sa position moyenne $\beta' = \beta'_m$, diminue d'une façon sensible la valeur qu'aurait $\tan \alpha$ pour le même appareil dénué de gouvernail

(¹) Pour le tracé des courbes de cette figure 23, on s'est servi des données numériques indiquées en Note (²) page 107. L'allure générale de cette figure n'est en rien modifiée si l'on remplace ces données numériques par d'autres de même ordre de grandeur.

horizontal. On voit ensuite que quand on manœuvre le gouvernail horizontal, $\tan \alpha$ subit certaines fluctuations. $\tan \alpha$ diminue quand on braque le gouvernail vers le haut et augmente quand on l'incline vers le bas. En résumé, pour chaque régime caractérisé,

Fig. 23.



par une valeur particulière de β' , les variations du couple central pour une même petite variation de l'angle d'attaque sont différentes.

Si l'on avait considéré le gouvernail de profondeur disposé à l'arrière, les variations du couple central auraient été accrues, par le fait de l'adjonction du gouvernail, comparativement à l'appareil sans gouvernail. Bien entendu, sous la réserve que le gouvernail, dans son orientation moyenne, soit moins cabré que la voilure principale de l'appareil. Mais, pour chaque valeur de β' , les variations du couple central seront toujours différentes.

En définitive, et c'est ce qu'il faut surtout retenir de cette discussion, la manœuvre du gouvernail de profondeur fait subir certaines fluctuations aux variations du couple central. Dans le langage de nos notations, nous pouvons dire : Quand on considère le couple central exprimé par les formules (60) ou (63), la valeur du coefficient c dépend de l'orientation du gouvernail de profondeur, c'est-à-dire de β' , et par conséquent, ce coefficient ne peut donc être considéré comme constant que lorsque le gouvernail horizontal est bloqué.

Nous verrons dans la suite qu'il est nécessaire d'avoir ce fait en vue dans l'étude de la stabilité de l'aéroplane.

CHAPITRE IV.

L'ACTION DES QUILLES D'UN AÉROPLANE.

44. Dans le Chapitre II, page 53, nous avons indiqué brièvement les principales dispositions des quilles ou cloisons verticales et nous avons signalé leur rôle principal.

Quand la vitesse d'un aéroplane est parallèle à son plan de symétrie, les quilles n'introduisent qu'une résistance supplémentaire à l'avancement de tout l'appareil. Les quilles n'interviennent efficacement que quand la vitesse de l'appareil dévie hors du plan de symétrie de ce dernier. Dans ce cas, les quilles introduisent des forces supplémentaires qui tendent à communiquer un déplacement latéral à l'appareil, mais leur action se traduit surtout par certains *couples* supplémentaires qu'elles font naître et que nous allons maintenant examiner.

Rapportons notre aéroplane à un système d'axes rectangulaires $G X_1 Y_1 Z_1$ (voir *fig.* 24) invariablement lié à l'appareil, ayant le centre de gravité de tout l'appareil pour origine, dont le plan $G X_1 Y_1$ est confondu avec le plan de symétrie de l'appareil, l'axe des X_1 ayant la direction et le sens de la vitesse du régime normal de l'appareil, et l'axe des Y_1 étant dirigée vers le haut, enfin l'axe des Z_1 étant dirigé vers l'observateur ⁽¹⁾. Nous relions le sens positif des translations avec le sens positif des rotations par la règle du tire-bouchon. Une rotation est donc considérée comme positive quand elle s'effectue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

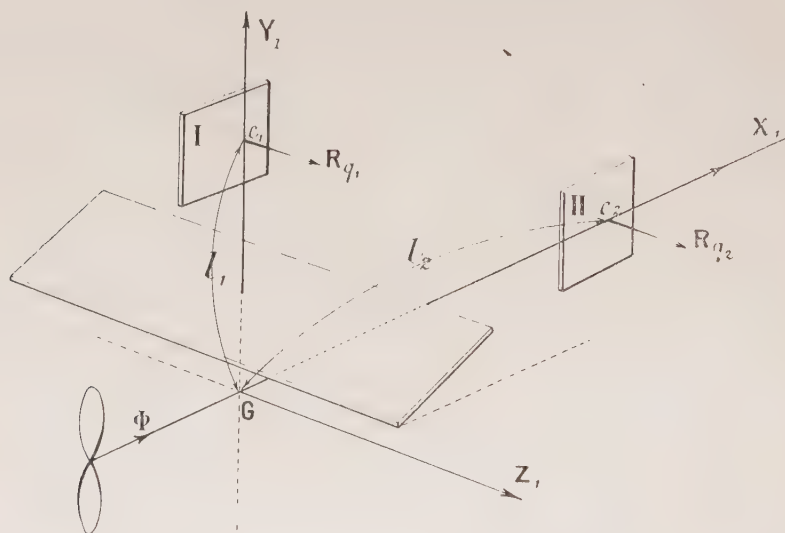
Nous considérons uniquement le cas de petites déviations de l'appareil à partir de son orientation de régime normal. Soit ν

(1) Le trièdre de référence considéré constitue ce qu'on appelle quelquefois un système droit. Le pouce, l'index et le médium de la main droite disposés à angle droit et successivement pris pour les axes des X_1 , Y_1 , Z_1 constituent un tel système.

l'angle de la vitesse V de l'appareil avec le plan de symétrie de ce dernier.

Quand la vitesse V de l'appareil dévie d'un angle ν hors de son plan de symétrie, les quilles, quelle que soit leur disposition,

Fig. 24.



recevront le vent sous un angle ν , étant parallèle au plan de symétrie de l'appareil. La résistance de l'air d'une quille quelconque, qui est toujours un plan mince, sera donc de la forme

$$p V^2 \nu.$$

p étant un certain coefficient, caractéristique des dimensions de la quille considérée.

Comme la disposition générale des quilles est toujours symétrique, on peut toujours remplacer tout système de quilles par un ou plusieurs plans minces, situés dans le plan de symétrie de tout l'appareil et équivalent au système de quilles considéré.

Trois dispositions principales des quilles sont, comme nous l'avons déjà dit, à distinguer, pour lesquelles les quilles se comportent différemment. Envisageons-les successivement.

45. Les centres de pression des quilles sont disposées au-dessus ou au-dessous du centre de gravité de l'appareil. — Comme nous ne considérons que de petites déviations de l'appareil à partir de son orientation de régime, le déplacement des centres de pression des quilles peut être considéré comme négligeable, c'est pourquoi nous pouvons parler d'une disposition des quilles telle que, si par leurs centres de pression, on mène des parallèles à l'axe des Y_1 , ces parallèles couperont très sensiblement l'axe des Z_1 . Toutes les quilles ainsi disposées peuvent toujours être remplacées au point de vue des réactions de l'air par une quille unique équivalente, située dans le plan de symétrie de l'appareil, et que nous désignerons par quille I (voir *fig. 24*). Il est fort aisé de voir quelles dimensions et quelle disposition il faut donner à cette quille équivalente, et nous n'y insisterons pas.

La résistance de l'air de la quille équivalente I étant normale à cette dernière, elle sera donc dirigée, suivant l'axe Z_1 , dans le sens positif ou négatif suivant le signe de ν . Si nous considérons ν comme positif, quand V est situé du même côté du plan GX_1Y_1 que l'axe $-Z_1$; alors, en grandeur et signe, on peut poser, pour la résistance de l'air de la quille I :

$$(69) \quad R_{q_1} = p_1 V^2 \nu.$$

Cette résistance R_{q_1} nous donnera, par rapport au centre de gravité G de l'appareil, un couple ayant pour valeur

$$(70) \quad C_{q_1} = l_1 p_1 V^2 \nu = \pi_1 V^2 \nu,$$

en désignant par l_1 la distance $C_1 G$ et en posant $l_1 p_1 = \pi_1$.

L'axe de ce couple sera dirigé suivant l'axe des X_1 et la formule (60) nous le donne en grandeur et signe. Le signe de ce couple dépend non seulement de ν , mais aussi de l_1 , qui doit être pris positif ou négatif, suivant que la quille I est située au-dessus ou au-dessous de G.

Quand l'appareil effectuera certaines oscillations, autour de X_1 comme axe, alors la quille I nous donnera encore un couple d'amortissement, dont la valeur peut être exprimée suivant ce que nous avons vu au paragraphe 43 par la formule

$$(71) \quad A_{q_1} = -a_1 V \omega_x,$$

a_1 étant une certaine constante qui dépend des dimensions des quilles et de leur éloignement du centre de gravité de l'appareil et ω_x étant la vitesse angulaire instantanée de rotation de l'appareil autour de l'axe X_1 . L'axe de ce couple A_{q_1} est dirigé suivant X_1 et toujours de sens contraire à ω_x de sorte que la formule (61) nous donne A_{q_1} en grandeur et signe.

46. Les centres de pression des quilles sont disposés en avant ou en arrière du centre de gravité de l'appareil. — Dans ce cas tout le système de quilles peut être ramené à une quille équivalente telle que la quille II (voir *fig. 24*).

La résistance de l'air de ces quilles est dirigée suivant Z_1 et a pour valeur en grandeur et signe

$$(72) \quad R_{q_2} = p_2 V^2 v,$$

Ces quilles produiront en outre un couple dont l'axe est dirigé suivant Y_1 et qui a pour expression en grandeur et signe

$$(73) \quad C_{q_2} = l_2 p_2 V^2 v = \pi_2 V^2 v,$$

l_2 désignant la distance $C_2 G$. Eu égard au déplacement du centre de pression l_2 n'est pas tout à fait constant mais ces variations peuvent être négligées dans une première approximation.

Le couple d'amortissement produit par la quille II a pour expression en grandeur et signe

$$(74) \quad A_{q_3} = -a_2 V \omega_y,$$

ω_y désignant la vitesse angulaire de rotation de l'appareil autour de l'axe Y_1 .

47. Les centres de pression des quilles sont disposés à droite et à gauche du centre de gravité de l'appareil. — Dans ce cas, tout le système de quilles peut être ramené à une quille équivalente située dans le plan de symétrie de l'appareil et dont le centre de pression coïncide sensiblement avec G . L'action d'une telle quille se traduira par une force, la résistance de l'air, dirigée suivant Z_1 et passant par G , dont le couple par rapport à G est, par conséquent nul, et par un couple d'amortissement qui interviendra lors des oscillations de l'appareil autour de l'axe X_1 .

Comme de telles actions sont déjà produites par les deux catégories de quilles précédemment envisagées, les quilles situées à droite et à gauche du centre de gravité de l'appareil n'introduisent donc aucune action nouvelle, et il est donc inutile de les envisager.

En définitive tout système de quilles peut être ramené à deux quilles équivalentes telles que la quille I et la quille II de la figure 24.

L'aéroplane que nous allons soumettre à l'étude pourra donc être considéré comme muni seulement de deux quilles telles que I et II sans pour cela porter atteinte à la généralité du problème.



DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

CHAPITRE I.

STABILITÉ LONGITUDINALE.

I. — COMMENT SE POSE LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

48. La notion de *stabilité*, en ce qui concerne l'aéroplane, n'est nullement aussi évidente qu'on a bien voulu le plus généralement l'admettre jusqu'ici. Le concept général de stabilité est même une notion assez confuse et essentiellement différente suivant les divers cas auxquels on l'applique. Même quand on ne parle que de la stabilité d'un mouvement ⁽¹⁾, il est bien difficile d'en donner une définition générale. En ce qui concerne l'aéroplane, quand on parle de sa stabilité, c'est sa stabilité, comme véhicule de locomotion, qu'on a uniquement en vue. La notion de la stabilité d'un véhicule, quoique voisine de celle d'un

(¹) Sur cette question de la stabilité d'un mouvement nous possédons un Ouvrage classique, celui de M. E. J. ROUTH. *A treatise on the stability of a given state of motion*, London 1877 (Voir aussi du même auteur. *Advanced rigid dynamics*, art. 256-307, 6^e édition, 1905). Un examen critique de cette notion a été fait par MM. F. KLEIN et A. SOMMERFELD dans leur ouvrage *Über die Theorie des Kreisels* Heft II, p. 342 § 6. Ce sont les ouvrages cités de E. J. Routh qui ont servi de base aux premiers essais de l'étude de la stabilité de l'aéroplane. Voir G. H. BRYAN et W. E. WILLIAMS, *The longitudinal stability of aerial gliders*. (*Proceedings of the Royal Society of London*, t. LXXIII, 7 janvier 1904).

mouvement, en diffère tout de même, en ce sens que certaines exigences d'un caractère pratique, et auquel tout véhicule de locomotion doit satisfaire, nous obligent à imposer à un véhicule des conditions de stabilité pour ainsi dire beaucoup plus sévères que pour la stabilité d'un mouvement. Je n'ai nullement l'intention d'entrer ici dans l'examen de la notion générale de stabilité, mais je voudrais seulement bien préciser ce qu'il faut entendre par stabilité d'un aéroplane, et de déterminer par quelles conditions cette stabilité doit être spécifiée pour que l'aéroplane présente vraiment toutes les garanties de stabilité réelle et de sécurité.

Tout le monde a vaguement le sentiment de ce qu'on veut dire quand on parle de la stabilité d'un appareil d'aviation. Ce qui domine la question, c'est d'être assuré contre toute possibilité de chute de l'appareil. Il y a chute quand l'appareil prend un mouvement descendant accéléré. Pour qu'un tel mouvement ne puisse pas se produire, l'orientation de l'appareil doit nécessairement satisfaire à certaines conditions que nous avons examinées dans les paragraphes 24-28 relatifs aux régimes de l'aéroplane. En général, pour des conditions extérieures déterminées et pour un appareil donné, il n'existe qu'une seule et unique orientation de l'appareil pour laquelle le mouvement de ce dernier s'effectue suivant ce que nous avons appelé *le régime normal*. Pratiquement parlant, l'appareil ne peut jamais rigoureusement satisfaire à toutes les conditions du régime normal, il effectue généralement sous l'effet de diverses influences émanant de l'appareil lui-même (telles que vibrations provoquées par le moteur, les mouvements du pilote, etc.), de petites oscillations autour de son régime. Pour que l'appareil soit effectivement stable, il faut d'abord que ces petites oscillations n'arrivent pas à l'écarter de son régime et qu'il tende, au contraire, toujours par lui-même, à s'en rapprocher. La sustentation de l'aéroplane est assurée par les forces de la réaction de l'air sur sa voilure, forces qui sont fonction de l'orientation de l'appareil et qui varient très rapidement avec celle-ci. Cette dernière circonstance rend très sensible pour l'aéroplane toute variation de son orientation, et c'est pourquoi il ne peut supporter de grands écarts de son régime sans pour cela se trouver très vite dans des conditions tout à fait impossibles de vol. Par exemple un tangage (oscillations longitudinales) même de quelques degrés est

déjà dangereux et, quoique l'appareil soit moins sensible au roulis (oscillations latérales), ce dernier ne peut pas non plus être bien grand pour que le retour de l'appareil vers son régime reste possible (sauf dans le virage où l'angle de roulis peut et même doit prendre une valeur sensible, mais dans le virage les conditions sont essentiellement différentes de celles du régime rectiligne). L'aéroplane stable doit donc dans les conditions habituelles de vol, être capable de supporter les causes perturbatrices extérieures qui tendent à l'écarter de son régime, sans pour cela subir de grandes déviations.

Essayons de nous rendre compte, au moins dans leurs grands traits, des causes extérieures qui peuvent venir troubler le régime d'un aéroplane. Quoiqu'il soit bien téméraire de vouloir se faire une idée de l'état de mouvement de l'air atmosphérique dans son état ordinaire, il est en tout cas complètement inadmissible, d'admettre que l'atmosphère soit le plus généralement continuellement et complètement sillonnée en tous sens par des remous et des tourbillons sans nom et sans nombre. Devant une telle supposition toutes les lois de la résistance de l'air s'évanouissent. Aucune analyse n'est applicable à des phénomènes admis essentiellement turbulents et irréguliers, et il est fort probable que dans de telles conditions la réalisation du vol d'un aéroplane serait chose impossible. D'ailleurs la pratique de l'aviation nous a déjà maintes fois donné des indications à ce sujet. On sait par exemple que, quand par mégarde un appareil s'engage dans le volume d'air agité par les remous créés par le sillage d'un autre appareil, il se comporte fort mal et que même les plus habiles pilotes sont généralement impuissants à éviter la chute de l'appareil. Or, dans ce cas, on peut être certain que l'appareil était plongé dans un volume d'air essentiellement troublé. Puisque les aéroplanes arrivent généralement à voler, ces cas d'atmosphère complètement troublée doivent être considérés comme fort rares. Du reste le fait que les remous de petit volume s'amortissent très vite dans l'air, quand ils ne sont pas entretenus par une cause extérieure, suffit pour nous le faire comprendre. Nous sommes donc amenés à admettre que dans les conditions atmosphériques ordinaires le volume d'air qui contient l'appareil est le plus généralement relativement homogène et que les zones complètement troublées qu'il peut avoir à traverser,

sont de faible étendue et passagères. Il est possible que dans certains cas l'aéroplane puisse rencontrer ce qu'on appelle quelquefois des *espèces d'abîmes* dans l'atmosphère, et où, à cause de l'état excessivement troublé de l'air, toutes les lois de la résistance de l'air cessent pour ainsi dire d'avoir lieu. L'action sustentatrice de l'air est alors fortement affaiblie et l'appareil semble précipité vers le sol. Mais quand dans les zones inférieures de l'atmosphère l'appareil rencontre des couches d'air plus régulières, on arrive généralement à retrouver un régime. Même dans de tels cas c'est encore une question de savoir si effectivement on avait affaire à un abîme dans l'atmosphère ou bien si l'appareil a été simplement entraîné par un courant d'air fortement descendant. Nous sommes donc amenés à conclure qu'en toute probabilité le volume d'air qui contient l'aéroplane doit être regardé comme étant le plus souvent, relativement homogène. Mais le régime des vents étant essentiellement variable, la vitesse d'ensemble de ce volume d'air doit varier presque continuellement, plus ou moins uniformément tant en grandeur qu'en direction. C'est cette variation de la vitesse d'ensemble de la masse d'air contenant l'appareil qui doit être regardée comme une des principales causes du trouble continu du régime de l'aéroplane. Et en effet, envisageons un aéroplane contenu dans un volume d'air ayant une vitesse d'ensemble déterminée. Quand cette vitesse variera, à chacune de ces nouvelles valeurs il correspondra un nouveau régime de l'appareil, par rapport auquel son ancienne orientation est une orientation déviée; l'appareil aura donc à se rapprocher de son nouveau régime. L'appareil automatiquement stable est celui qui retrouve toujours de lui-même son régime sans l'intervention du pilote. Il va de soi qu'une déviation du régime peut aussi être produite par un remous passager. En définitive, voilà donc comment se présente le problème de la stabilité de l'aéroplane.

Un aéroplane évolue en air calme, ou bien par un vent horizontal, ascendant ou descendant. Une cause quelconque (variation de la vitesse du vent, remous passager) de durée relativement courte, fait dévier l'appareil de son régime, mais la déviation subie, l'appareil se retrouve de nouveau dans un volume d'air relativement homogène. L'appareil, écarté, dans ces conditions, de son régime, ne pourra rester dans l'orientation acquise, puisque

les forces qui lui sont appliquées ne se font plus équilibre. L'appareil effectuera alors certains mouvements qui pourront soit l'écarter, soit le rapprocher de son régime. L'appareil automatiquement stable devra *rapidement* et de lui-même retrouver son régime sans oscillations dangereuses. Il faut apporter une attention toute spéciale à la rapidité et au caractère de l'amortissement des oscillations de l'appareil et ceci, eu égard au fait, que les causes perturbatrices peuvent se succéder à de faibles intervalles et que pour être certain qu'aucune addition des effets de ces dernières ne pourra jamais se produire, il est nécessaire que la première déviation soit déjà amortie quand interviendra la cause perturbatrice suivante. Dans les essais d'étude de la stabilité de l'aéroplane faits jusqu'à ce jour, on a, je ne sais pourquoi, toujours négligé ce côté de la question. On s'est simplement occupé de savoir s'il y avait amortissement ou non des oscillations de l'appareil sans tenir compte du temps qu'un tel amortissement pouvait exiger. On conçoit aisément toute l'importance de ce facteur, le temps, car un appareil dont les oscillations seraient lentes à s'amortir est évidemment pratiquement, complètement équivalent à un appareil instable. C'est donc à l'étude des mouvements de l'aéroplane autour de son orientation de régime dans un volume d'air relativement homogène, que se ramène le problème de la stabilité automatique de l'aéroplane.

Pour plusieurs raisons nous sommes toutefois conduits à nous limiter à l'étude des seuls *petits mouvements* de l'appareil autour de son régime. D'abord, à en juger d'après les indications que la pratique de l'aviation nous a fournies jusqu'ici, tant que l'aéroplane se trouve dans des conditions compatibles avec un régime quelconque, seules des déviations relativement petites sont observées. Ensuite l'approximation générale de nos connaissances actuelles des lois de la résistance de l'air est difficilement compatible avec une plus grande généralité du problème. Enfin, si même on avait les données nécessaires pour aborder l'étude du mouvement général de l'aéroplane, le système d'équations auquel on arriverait aurait une forme telle que son intégration générale serait intraitable par les moyens que l'analyse moderne met à notre disposition, et on serait tout de même réduit à n'étudier que les petits mouvements de l'appareil pour avoir au moins une idée

générale du phénomène. Du reste cette méthode des petits mouvements a pour elle un passé où elle s'est toujours montrée sous le jour le plus favorable. Dans bien des problèmes on a déjà pu constater sa valeur pratique. Les résultats auxquels elle mène sont effectivement le plus généralement l'expression de la réalité des choses dans une approximation pratiquement suffisante. La méthode des petits mouvements répond donc bien dans notre cas au caractère du problème de la stabilité de l'aéroplane et correspond parfaitement au degré d'exactitude des données premières ⁽¹⁾. On peut donc dire qu'en suivant cette voie on a toutes les probabilités d'arriver à éclairer cette question de la stabilité de l'aéroplane qui paraît encore entourée d'un certain mystère. On verra que l'étude systématique de la question ainsi posée nous permettra d'en dévoiler bien des côtés.

II. — ÉQUATIONS DES PETITS MOUVEMENTS DE L'AÉROPLANE DANS SON PLAN DE SYMÉTRIE.

49. Ainsi donc pour étudier la stabilité de l'aéroplane nous allons envisager l'appareil contenu dans un volume d'air relativement homogène et écarté de son orientation de régime, et nous allons examiner comment se comporte l'appareil en partant d'une telle orientation, la déviation de l'appareil à partir de son régime étant considérée comme relativement petite.

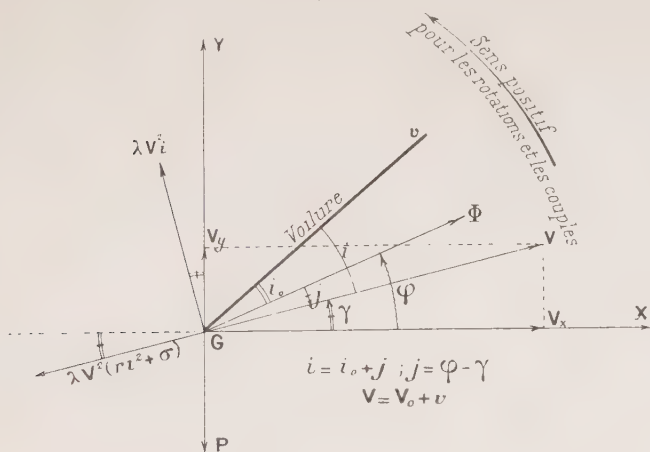
Nous commencerons par examiner les mouvements de l'appareil en air calme à partir de son régime horizontal et rectiligne, en envisageant d'abord uniquement les mouvements de l'appareil

(1) Si après tous ces arguments il reste encore dans l'esprit du lecteur quelques doutes sur la valabilité de la méthode des petits mouvements pour juger de la stabilité de l'aéroplane, qu'on m'excuse de citer l'exemple suivant. Il ne viendra jamais à l'esprit de personne pour étudier la stabilité d'une voiture automobile de la considérer couchée sur le flanc et d'examiner si en partant d'une telle position elle pourrait par ses propres moyens retrouver son régime normal de marche. C'est bien, évidemment, la manière dont la voiture se comporte vis-à-vis des petites perturbations que les cahots et les inégalités de la route peuvent lui communiquer, qui servira de critère pour sa stabilité. De même pour l'aéroplane nous n'avons donc qu'à envisager les écarts relativement faibles de son régime pour juger de sa stabilité et non pas envisager des déviations n'ayant rien de commun avec l'orientation normale de l'appareil.

dans son plan de symétrie considéré vertical. Il sera montré dans la suite que le système général d'équations relatif aux petits mouvements de l'aéroplane se divise en deux groupes indépendants, l'un relatif au tangage, l'autre au roulis et à la giration de l'appareil. Ainsi se trouvera justifié l'examen indépendant des oscillations longitudinales de l'aéroplane qui va suivre.

Considérons un aéroplane, tel que nous l'avons décrit dans la première Partie de cette étude, muni d'empennages horizontaux et de quilles, ces dernières étant supposées remplacées par le système équivalent de quilles telles que I et II indiqué sur la figure 24. Nous supposerons d'abord que la poussée des hélices Φ passe par le centre de gravité G de tout l'appareil et nous considérerons que toutes ses manœuvres ou gouvernes sont bloquées, c'est-à-dire que nous étudierons les mouvements de l'appareil envisagé comme un *système invariable* (à part la rotation des hélices et le fonctionnement du moteur).

Fig. 25.



Soit GXY un système d'axes rectangulaires contenu dans le plan de symétrie de l'appareil, ayant le centre de gravité G pour origine, dont l'axe des Y est dirigé suivant la verticale ascendante et qui est parallèle à un système d'axes fixes dans l'espace. Pour l'orientation de régime de l'aéroplane les axes GX, Y, invariablement liés à l'appareil, que nous avons définis au paragraphe (§ 44)

relatif aux quilles, sont supposés coïncider avec les axes du système GXY.

Nous définissons un petit écart de l'appareil à partir de son régime par les paramètres suivants (voir *fig.* 25) :

φ = angle de tangage de l'appareil, c'est l'angle de la direction de la poussée Φ des hélices avec l'axe des X. Cet angle définit l'inclinaison de l'appareil sur l'horizon.

γ = angle de la vitesse $\bar{V}$ de l'appareil avec l'axe des X. Cet angle définit la variation de l'orientation de $\bar{V}$.

v = variation de la grandeur de la vitesse de l'appareil à partir de sa valeur V_0 de régime.

Les angles φ et γ sont représentés sur la figure 25 dans la supposition de valeurs positives.

D'après ce que nous avons vu dans la première Partie de cette étude, les forces agissantes sur l'aéroplane sont :

Le poids P de tout l'appareil dirigé suivant — Y.

La poussée Φ des hélices dirigée suivant X_1 .

La résistance de l'air de tout l'appareil dont nous considérons les deux composantes (voir §§ 20 et 21) :

La poussée qui a pour expression $\lambda V^2 i$ et qui est dirigée suivant la normale à $\bar{V}$.

La traînée égale à $\lambda V^2 (ri^2 + \sigma)$ et dirigée suivant — $\bar{V}$.

L'appareil est en outre sollicité par les couples :

Le couple central qui pour le cas où Φ passe par G, a pour expression (voir formule 63, § 41),

$$\Gamma = c V_0^2 (i_0 - i),$$

et dont l'axe est normal au plan de symétrie de l'appareil.

Le couple d'amortissement, qui a pour expression suivant ce que nous avons vu au paragraphe 13

$$C_a = a V \frac{d\varphi}{dt},$$

$\frac{d\varphi}{dt}$ étant la vitesse angulaire instantanée de rotation de l'appareil autour d'un axe passant par G et normal au plan de symétrie de l'appareil.

Désignons par V_x et V_y les projections de la vitesse V du centre de gravité de l'appareil sur les axes X et Y. Désignons par M la

masse de l'aéroplane considéré et par I son moment d'inertie par rapport à un axe passant par G et normal au plan de symétrie de l'appareil, axe qui est évidemment un axe principal d'inertie de l'appareil.

Dans ces conditions, le théorème du mouvement du centre de gravité nous donne (voir *fig.* 25)

$$(75a) \quad M \frac{dV_x}{dt} = \Phi \cos \varphi - \lambda V^2 i \sin \gamma - \lambda V^2 (ri^2 + \sigma) \cos \gamma,$$

$$(75b) \quad M \frac{dV_y}{dt} = -P + \Phi \sin \varphi + \lambda V^2 i \cos \gamma - \lambda V^2 (ri^2 + \sigma) \sin \gamma,$$

et d'après le théorème des moments cinétiques relatif au centre de gravité nous obtenons

$$(75c) \quad I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = c V_0^2 (i_0 - i) - a V \frac{d\varphi}{dt}.$$

En remarquant que φ et γ sont supposés être de petits angles; que

$$V_x = V \cos \gamma \cong V,$$

$$V_y = V \sin \gamma \cong V \gamma,$$

$$V = V_0 + v.$$

En posant de plus

$$i = i_0 + j,$$

où j est la petite variation de l'angle d'attaque à partir de sa valeur de régime i_0 . En négligeant les produits et carrés des quantités considérées comme petites et enfin en se rappelant que suivant ce que nous avons vu page 59 on a $P = \lambda V_0^2 i_0$ et $\Phi = \lambda V_0^2 (ri_0^2 + \sigma)$, les équations (75) se réduisent au système suivant :

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad M \frac{dv}{dt} = -P \gamma - 2P r j - \frac{2\Phi}{V_0} v, \\ (b) \quad M V_0 \frac{d\gamma}{dt} = (\lambda V_0^2 + \Phi) j + \frac{2P}{V_0} v, \\ (c) \quad I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -c V_0^2 j - a V_0 \frac{d\varphi}{dt}, \end{array} \right.$$

avec

$$j = \varphi - \gamma,$$

$$P = \lambda V_0^2 i_0,$$

$$\Phi = \lambda V_0^2 (ri_0^2 + \sigma).$$

Ce système d'équations définit les oscillations longitudinales de l'aéroplane tel que nous l'avons décrit dans la première Partie de cette étude et dont la poussée des hélices passe par le centre de gravité de l'appareil.

Comme nous l'avons vu, le point le plus imprécis de nos connaissances des lois de la résistance de l'air, c'est la question du déplacement du centre de pression. Les autres données aérodynamiques qui intéressent l'aéroplane sont déterminées, au moins dans une première approximation. D'autre part, dans le Chapitre relatif au couple central, nous avons montré que l'expression générale de ce dernier est indépendante du sens de déplacement du centre de pression. Or le couple central est le seul terme figurant dans le système d'équations (76) où le sens de déplacement du centre de pression intervient d'une manière appréciable; ce système d'équations (76) est donc lui aussi indépendant du sens de déplacement du centre de pression. *Par conséquent, quels que soient les progrès futurs faits dans l'étude des lois de la résistance de l'air, notre système d'équations relatif aux petits mouvements de l'aéroplane dans son plan de symétrie autour de son régime, restera toujours dans une première approximation l'expression exacte du problème.* On conçoit ainsi tout l'intérêt que présente la discussion de ce système d'équations et la valeur pratique des résultats qui pourront en être déduits.

III. — L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE.

50. Que sont au fond ces équations (76)? Ce ne sont autre chose que les équations des mouvements peu variés de l'aéroplane, à partir d'un mouvement possible de ce dernier, que nous avons étudié, et que nous avons désigné par mouvement de régime horizontal rectiligne. Les variables v , γ et φ sont les paramètres qui déterminent l'écart subit par l'appareil à partir de son régime, et il est bien aisé de voir que le système (76) admet pour solution particulière $\bar{V} = \bar{V}_0$ et $i = i_0$ ou autrement parlant, $v = 0$; $\gamma = 0$; $\varphi = 0$, qui sont les caractéristiques du régime horizontal rectiligne de l'appareil. Ce sont les petits écarts, à partir de cette solution du régime, que nous avons à étudier.

Remplaçons dans le système (76) la variation j de l'angle d'attaque de l'appareil par sa valeur en fonction de φ et de γ et ordonnons ces équations par rapport à v , φ et γ .

Nous obtenons

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} + \frac{2\Phi}{MV_0} v - \frac{P(2r-1)}{M} \gamma + \frac{2Pr}{M} \varphi = 0, \\ -\frac{2P}{MV_0^2} v + \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} \gamma - \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} \varphi = 0, \\ -\frac{cV_0^2}{I} \gamma + \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\alpha V_0}{I} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{cV_0^2}{I} \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Cherchons les solutions générales de ce système d'équations.

Ce système est linéaire en v , γ et φ et admet comme il est bien connu, pour solutions particulières

$$v = a_1 e^{\mu t},$$

$$\gamma = a_2 e^{\mu t},$$

$$\varphi = a_3 e^{\mu t}.$$

En substituant ces solutions particulières dans (77), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\mu + \frac{2\Phi}{MV_0} \right) a_1 - \frac{P(2r-1)}{M} a_2 + \frac{2Pr}{M} a_3 &= 0, \\ -\frac{2P}{MV_0^2} a_1 + \left(\mu + \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} \right) a_2 - \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} a_3 &= 0, \\ \frac{cV_0^2}{I} a_2 + \left(\mu^2 + \frac{\alpha V_0}{I} \mu + \frac{cV_0^2}{I} \right) a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pour que ce système d'équations résolu par rapport à a_1 , a_2 , a_3 admette des solutions non nulles, il faut qu'on ait

$$(78) \quad \begin{vmatrix} \mu + \frac{2\Phi}{MV_0} & -\frac{P(2r-1)}{M} & \frac{2Pr}{M} \\ -\frac{2P}{MV_0^2} & \mu + \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} & -\frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} \\ 0 & -\frac{cV_0^2}{I} & \mu^2 + \frac{\alpha V_0}{I} \mu + \frac{cV_0^2}{I} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant égalé à zéro représente l'équation de condition qui nous fournira les valeurs de μ . En développant ce déterminant et en ordonnant par rapport aux puissances de μ , on

obtient

$$(79) \quad \mu^4 + \mu^3 \left(\frac{\alpha V_0}{I} + \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0} \right) + \mu^2 \left(\frac{\alpha V_0}{I} \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0} + \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} + \frac{cV_0^2}{I} \right) + \mu \left(\frac{\alpha V_0}{I} \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} + \frac{cV_0^2}{I} \frac{2\Phi}{MV_0} \right) + \frac{cV_0^2}{I} \frac{2P^2}{M^2 V_0^2} = 0,$$

équation qui représente l'équation caractéristique du système (76).

IV. — LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE COMME CRITÈRES DE STABILITÉ DE L'AÉROPLANE.

51. Désignons les racines de l'équation caractéristique (85) par $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ en les supposant d'abord toutes *distinctes*. L'un quelconque des paramètres, φ par exemple, qui caractérise la déviation de l'appareil, à partir de son régime, a alors pour expression :

Dans le cas où toutes les racines de l'équation sont réelles

$$(I) \quad \varphi = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} + C_3 e^{\mu_3 t} + C_4 e^{\mu_4 t}.$$

Dans le cas où deux des racines sont complexes, par exemple $\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 i; \mu_2 = \alpha_1 - \beta_1 i$

$$(II) \quad \varphi = e^{\alpha_1 t} (K_1 \cos \beta_1 t + K_2 \sin \beta_1 t) + C_3 e^{\mu_3 t} + C_4 e^{\mu_4 t}.$$

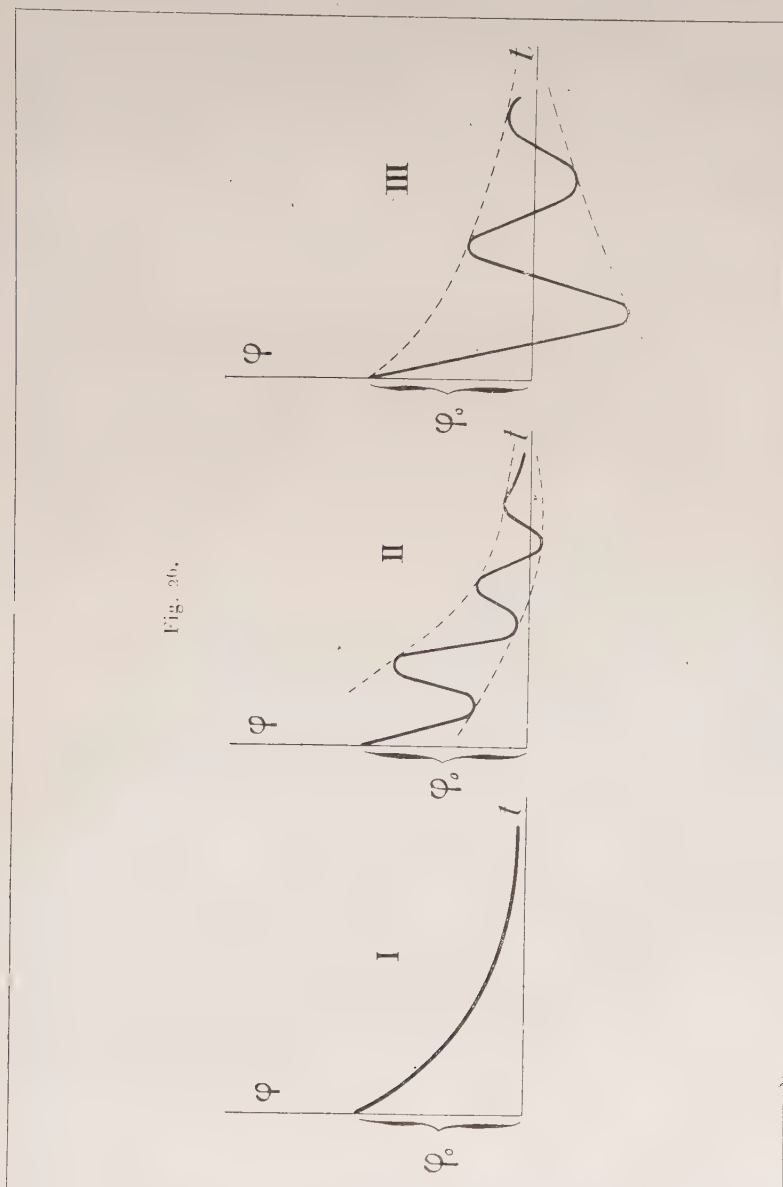
Dans le cas où toutes les racines sont complexes, c'est-à-dire de la forme $\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 i; \mu_2 = \alpha_1 - \beta_1 i; \mu_3 = \alpha_2 + \beta_2 i; \mu_4 = \alpha_2 - \beta_2 i$

$$(III) \quad \varphi = e^{\alpha_1 t} (K_1 \cos \beta_1 t + K_2 \sin \beta_1 t) + e^{\alpha_2 t} (K_3 \cos \beta_2 t + K_4 \sin \beta_2 t).$$

Et des expressions semblables pour ν et γ .

Dans ces expressions, $C_1, C_2, \dots, K_1, K_2, \dots$, sont des constantes qui dépendent des conditions initiales du problème, c'est-à-dire dans notre cas de la déviation subie par l'appareil qui, tout en étant supposée petite, peut être quelconque. Les valeurs de ces constantes doivent donc aussi être considérées comme quelconques, soumises à la seule restriction d'être compatibles avec une petite déviation de l'appareil.

Pour que notre aéroplane puisse être considéré comme stable,



il faut nécessairement que φ , γ et ν soient des fonctions décrois-

santes du temps, afin que l'appareil, une fois la déviation subie, tende à retrouver son régime et non pas à s'en écarter. Cette condition exige qu'on ait :

Dans le cas I

$$\mu_1 < 0, \quad \mu_2 < 0, \quad \mu_3 < 0, \quad \mu_4 < 0.$$

Dans le cas II

$$\alpha_1 < 0, \quad \mu_3 < 0, \quad \mu_4 \leq 0,$$

Dans le cas III

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 < 0,$$

c'est-à-dire que les racines de l'équation caractéristique soient toutes négatives ou bien, dans le cas de certaines racines complexes, que leurs parties réelles soient négatives. Alors seulement les termes exponentiels, qui expriment φ , $\dot{\gamma}$ et ν en fonction du temps, seront des expressions décroissantes de ce dernier. Toutefois l'allure de la variation des paramètres caractéristiques de la déviation de l'appareil, dans les trois cas I, II et III, sera différente.

Dans le cas I, en considérant par exemple la variation du paramètre φ , ce dernier sera une fonction apériodique décroissante du temps, dont l'allure générale est représentée sur la figure 26 (I). Dans ce cas, l'appareil dévié de son orientation de régime s'en approche asymptotiquement sans oscillations.

Dans le cas II, φ sera une fonction sémi-périodique décroissante du temps, et l'appareil retrouvera son régime par une série de petites oscillations [voir fig. 26 (II)].

Dans le cas III, φ sera une fonction périodique décroissante du temps et l'appareil se rapprochera de son régime en faisant une série d'oscillations périodiques autour de ce dernier [voir fig. 26 (III)].

Il va de soi que, toutes choses égales, on a tout intérêt à ce que l'aéroplane soit apériodique, c'est-à-dire incapable d'oscillations, car, dans ce cas, il se rapproche de son régime d'une manière douce et sans balancements. Une seule circonstance pourrait nous faire préférer les cas II ou III au cas I.

§2. Jusqu'ici nous avons parlé de l'amortissement des oscillations de l'aéroplane sans nous occuper du temps que peut exiger

un tel amortissement. Il est fort aisé de concevoir toute l'importance de ce facteur.

Si un aéroplane est excessivement lent à retrouver son régime, il est difficile de le considérer comme pratiquement stable. Et en effet, notre appareil pour être stable, doit non seulement être capable de subir une première déviation, mais doit aussi être en état de supporter, toute une succession de causes perturbatrices qui peuvent venir troubler son origine. Or, comme nous l'avons déjà dit, l'aéroplane est un appareil excessivement sensible à ses variations d'orientation, on peut même dire que sa sustentation n'est déterminée que par son orientation, et il ne s'en faut pas de beaucoup pour que l'écart subi l'amène dans une telle orientation, que tout vol devienne impossible et que seule la chute de l'appareil puisse s'en suivre. Il est donc nécessaire, pour être certain de la stabilité de l'appareil, que la première déviation soit déjà amortie quand interviendra la cause perturbatrice suivante pour que tout effet d'addition de deux déviations successives soit impossible. Il faut donc que non seulement les oscillations de l'appareil s'amortissent, mais il faut encore qu'elles s'amortissent rapidement. À ce point de vue, l'aéroplane diffère essentiellement du navire.

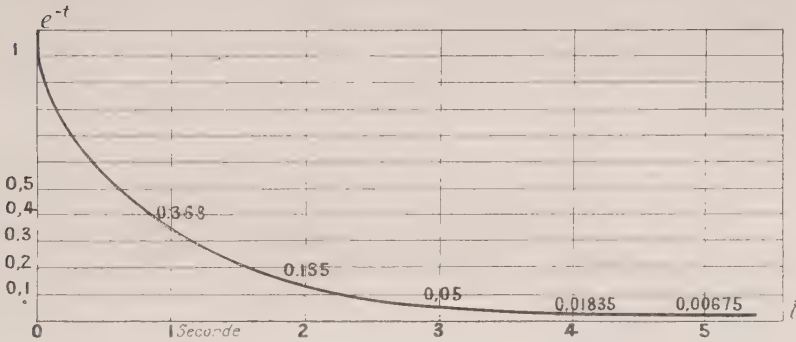
Un navire bien lesté, n'éprouve aucun inconvénient à être bercé par les vagues et l'on n'a pas à s'occuper de la rapidité de l'amortissement de ses oscillations. Il en est tout autrement pour l'aéroplane, autant qu'on en peut juger, d'après ce que nous a montré jusqu'ici la pratique de l'aviation, il est absolument inadmissible de laisser un aéroplane balancé par le vent, sans qu'il s'ensuive les plus fâcheuses conséquences. Toute tendance au balancement doit donc être rapidement et énergiquement réprimée.

C'est justement ce qui fait la difficulté du maniement des aéroplanes, tels qu'on les construit actuellement, et ce qui exige une attention continuellement soutenue du pilote. Il est donc nécessaire, pour décider de la stabilité d'un aéroplane, de tenir compte de la rapidité d'amortissement des ses oscillations. Précisons cette notion de rapidité d'amortissement des oscillations de l'aéroplane. Soit par exemple φ_0 l'écart subi par le paramètre φ et soit t_a le temps au bout duquel φ n'est plus que la $k^{\text{ième}}$ partie de φ_0 , c'est-à-

dire $\varphi = k\varphi_0$ où k est une petite fraction, suffisamment petite pour que $k\varphi_0$ puisse être pratiquement considéré comme quasi nul. C'est ce temps t_a qu'on peut appeler *temps d'amortissement du paramètre φ* . Quelle limite doit-on imposer aux temps d'amortissement des paramètres caractéristiques de la déviation de l'aéroplane pour que ce dernier soit effectivement un appareil stable. Il est difficile de le dire *a priori*. C'est une question qu'on ne peut décider qu'expérimentalement; mais, en tout cas, il est à prévoir qu'en toute probabilité, ce temps d'amortissement doit être de l'ordre de quelques secondes et peut-être même de quelques fractions de seconde. Il est aisé de voir que ce temps d'amortissement dépend essentiellement de la valeur absolue des racines de l'équation caractéristique, qui figurent comme exposants dans les termes exponentiels des expressions générales de φ , v et γ que nous avons indiquées page 128 et dont la décroissance est évidemment d'autant plus rapide que ces racines, tout en étant négatives, sont plus grandes en valeur absolue. On peut même, je ne parle maintenant que de la valeur absolue des racines, considérer la plus petite des racines de l'équation caractéristique comme une certaine mesure du temps d'amortissement des oscillations d'un aéroplane et, par conséquent, caractériser par ce nombre le degré de stabilité de l'appareil. Un aéroplane doit être considéré comme d'autant plus stable que cette plus petite racine est plus grande en valeur. On s'est déjà maintes fois posé la question de savoir si l'on ne pourrait pas estimer d'une manière quantitative le degré de stabilité d'un aéroplane. Je me permets de croire que la plus petite racine de l'équation caractéristique peut effectivement être adoptée comme une telle caractéristique. Pour permettre de bien se rendre compte de l'influence de la valeur absolue des racines de l'équation caractéristique sur le temps d'amortissement, nous donnons sur la figure 27 la courbe exponentielle $e^{-\mu t}$ pour $\mu = 1$. Sur cette figure aux points, une seconde, deux secondes, etc., nous avons inscrit la valeur des ordonnées correspondantes. Cette figure permet d'estimer aisément la rapidité de la décroissance de toute expression de la forme $Ce^{-\mu t}$. On voit ainsi que pour $\mu = 1$, ce n'est qu'au bout de cinq secondes environ, que l'ordonnée de la courbe devient inférieure à $\frac{1}{100}$ de l'ordonnée primitive, mais que pour $\mu = 5$, ceci a déjà lieu au bout d'une seconde. Ainsi donc, quand

μ est égal à quelques unités entières, la décroissance d'une fonction de la forme $Ce^{-\mu t}$ est assez rapide, par contre quand μ est une petite fraction, inférieure à l'unité, sa décroissance est lente.

Fig. 27.



plane, apparaîtra un terme de la forme

$$(C_1 + C_2 t) e^{-\mu t},$$

dont le coefficient contient t . Quand t variera à partir de zéro, le terme $C_2 t e^{-\mu t}$ commencera par croître et atteindra sa valeur maximum égale à $\frac{C_2}{e\mu}$ au temps $t = \frac{1}{\mu}$. Quand μ sera petit, ce maximum pourra être grand et atteint seulement, au bout d'un temps assez long. Dans ce cas, notre aéroplane devra être considéré comme essentiellement instable, puisque l'appareil dévié de son régime, commencera par s'en écarter encore plus, et cela pendant un assez grand intervalle de temps. Par conséquent, quand notre équation caractéristique possédera une racine double, petite en valeur absolue, ce cas correspondra à l'appareil essentiellement instable.

En général, une racine double, à moins que sa valeur absolue ne soit très grande, ne présentera rien de favorable au point de vue de la stabilité de l'aéroplane, et ce cas doit donc être évité (1).

On conçoit ainsi dans quel sens les racines de l'équation caractéristique doivent être étudiées.

Pour juger de la stabilité d'un aéroplane, il est nécessaire d'être renseigné non seulement sur le signe de ces racines, mais aussi sur leur valeur absolue. L'équation caractéristique doit donc être soumise à une discussion des plus détaillées.

Dans tous les essais d'étude de la stabilité de l'aéroplane faits jusqu'à ce jour, on s'est toujours uniquement préoccupé du signe des racines des équations caractéristiques. On conçoit aisément d'après ce qui a été précédemment expliqué, que ceci est bien une condition *nécessaire* de stabilité, mais qui, en aucun cas, ne peut être considérée comme *suffisante*. Nous verrons dans la suite que

(1) Il peut se faire que quoique les racines de l'équation caractéristique soient multiples, les termes ayant des coefficients fonctions de t soient absents dans les expressions générales des paramètres caractéristiques de la déviation de l'aéroplane. Comme pour l'aéroplane, ce cas ne se présente jamais, nous ne nous y arrêterons pas. Pour une étude détaillée des systèmes d'équations linéaires et une discussion complète de leurs équations caractéristiques, on pourra consulter l'Ouvrage déjà cité de E. J. ROUTH, *A treatise on the stability of motion*, où la question est justement traitée dans le sens qui nous intéresse.

c'est justement aux valeurs absolues des racines de l'équation caractéristique qu'est liée une des propriétés les plus fondamentales de l'aéroplane au point de vue de sa stabilité.

V. — ÉTUDE DES RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE.

54. Nous avons à discuter l'équation

$$(79) \quad \mu^4 + \mu^3 \left(\frac{\alpha V_0}{I} + \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0} \right) + \mu^2 \left(\frac{\alpha V_0}{I} \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0} + \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} + \frac{cV_0^2}{I} \right) + \mu \left(\frac{\alpha V_0}{I} \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} + \frac{cV_0^2}{I} \frac{2\Phi}{MV_0} \right) + \frac{cV_0^2}{I} \frac{2P^2}{M^2 V_0^2} = 0.$$

Nous devons estimer l'influence de toutes les caractéristiques de l'aéroplane sur les racines de cette équation. La principale difficulté que présente l'étude de cette équation, c'est la grandeur de ses coefficients. Après avoir essayé toute une série de méthodes, nous nous sommes arrêtés à celle qui va suivre et qui présente entre autres le grand avantage de nous conduire à un procédé graphique de détermination de certaines caractéristiques de l'aéroplane les plus favorables à sa stabilité. Nous n'exposerons cette méthode que dans la mesure nécessaire à la compréhension de la présente discussion. Pour de plus amples renseignements, on pourra consulter les ouvrages de M. Félix Klein ⁽¹⁾ à ce sujet.

Pour la brièveté de l'écriture, posons

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{ll} q_1 = \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0}, & q_2 = \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2}, \\ q'_1 = \frac{2\Phi}{MV_0} & q'_2 = \frac{2P^2}{M^2 V_0^2}, \\ A = \frac{\alpha V_0}{I}, & C = \frac{cV_0^2}{I}; \end{array} \right.$$

(1) Félix KLEIN, *Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen*, article publié dans *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, page 3, par Walcker DYCK, München 1892. — Félix KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teil I, *Aritmetik, Algebra, Analysis*, page 203 et suivantes. Cours autographie 1908.

q_1, q_2, q'_1, q'_2 sont des quantités qui dépendent des caractéristiques de l'aéroplane; A un paramètre qui caractérise l'amortissement de l'appareil; C un paramètre qui caractérise son couple de rappel vers son orientation de régime.

En introduisant ces notations dans l'équation (79), nous obtenons

$$(81) \quad \mu^4 + (A + q_1)\mu^3 + (Aq_1 + q_2 + C)\mu^2 + (Aq_2 + Cq'_1)\mu + Cq'_2 = 0.$$

Supposons d'abord, que nous avons un appareil déterminé, destiné à marcher à un régime déterminé, alors les quantités q_1, q_2, q'_1, q'_2 ont des valeurs bien déterminées. Suivant ce que nous avons vu dans la première Partie de cette étude, en munissant l'appareil d'une queue de dimensions et d'inclinaison appropriées, on peut faire varier, dans une large mesure, le couple d'amortissement et le couple de rappel (couple central stabilisateur) de tout l'appareil, autrement dit on peut faire varier les quantités A et C qui caractérisent ces derniers couples. Quand on a affaire à l'étude des oscillations d'un système, c'est toujours l'influence des conditions d'amortissement et des effets de rappel qu'il importe d'élucider tout d'abord. C'est pourquoi nous commencerons par bien nous rendre compte de l'influence de ces paramètres A et C sur les racines de notre équation caractéristique.

Mettons dans l'équation (81) ces paramètres A et C en évidence, nous obtenons

$$\mu^4 + q_1\mu^3 + q_2\mu^2 + C(\mu^2 + q'_1\mu + q'_2) + A(\mu^3 + q_1\mu^2 + q_2\mu) = 0,$$

ou bien encore

$$(82) \quad \mu + C \frac{\mu^2 + q'_1\mu + q'_2}{\mu(\mu^2 + q_1\mu + q_2)} + A = 0.$$

Etablissons une correspondance univoque et réciproque, respectivement entre les termes de cette équation et les termes de l'équation

$$(83) \quad y + ux + v = 0,$$

c'est-à-dire posons

$$(84a) \quad y = \mu, \quad x = \frac{\mu^2 + q'_1\mu + q'_2}{\mu(\mu^2 + q_1\mu + q_2)},$$

$$(84b) \quad u = C, \quad v = A,$$

Si dans l'équation (83) on interprète x et y comme coordonnées ponctuelles, cette équation représentera une droite déterminée par les coefficients u et v . Le point (x, y) est censé parcourir la droite (u, v) et la tracer ainsi tout entière. Si dans cette même équation on interprète u et v comme coordonnées tangentielles, elle représentera alors l'équation d'un point déterminé par ces coordonnées x et y . La droite (u, v) est censée tourner autour du point (x, y) et le faisceau de droites ainsi produites enveloppe pour ainsi dire ce point. C'est la possibilité de cette double interprétation des équations algébriques qui constitue le principe de dualité. Envisageons à ce point de vue l'équation (83) et d'un autre côté, considérons x et y définis par les relations (84 a) et u et v par les relations (84 b). Dans ces conditions le système (84 a) nous figurera en coordonnées ponctuelles dans le plan des x, y une courbe unicursale dont μ est le paramètre et le système (84 b) représentera en coordonnées tangentielles dans ce même plan une droite dont $-u$ est le coefficient angulaire et $-v$ le segment intercepté par cette droite sur l'axe des y . Les points d'intersection de la courbe (84 a) avec la droite (84 b), satisfont évidemment par leurs coordonnées respectivement ponctuelles et tangentielles à l'équation (82). Les valeurs du paramètre μ , correspondantes à ces points d'intersection satisfont donc aussi à l'équation (82) c'est-à-dire à notre équation caractéristique. Ces valeurs de μ sont donc les racines réelles de cette équation. Dans notre cas la valeur du paramètre μ qui correspond à un point d'intersection se détermine fort aisément puisque $\mu = y$, c'est-à-dire à l'ordonnée du point d'intersection considéré. Ainsi donc pour déterminer les racines réelles de notre équation caractéristique il nous suffira de chercher les points d'intersection de la droite

$$u = C, \quad v = A.$$

avec la courbe

$$(85) \quad x = \frac{y^2 - q_1 y - q_2}{y(y^2 + q_1 y + q_2)}.$$

Les ordonnées de ces points d'intersection seront les racines réelles de notre équation caractéristique. En faisant varier A et C notre droite se déplacera dans le plan xy et l'on pourra aisément suivre les variations des racines réelles de l'équation caractéristi-

que et inversement on pourra aussi facilement se rendre compte quelles valeurs doivent être attribuées à A et à C pour que les racines réelles de notre équation aient telle ou autre valeur.

55. Étudions cette courbes (85) et voyons quelles sont les différentes allures qu'elle peut avoir pour toutes les valeurs possibles et imaginables des caractéristiques d'un aéroplane. Pour cela examinons d'abord quelles sont les valeurs qu'en général sont susceptibles de prendre les coefficients q_1 , q_2 , q'_1 , q'_2 et étudions les racines des deux équations obtenues en égalant à zéro les deux polynômes du second degré qui figurent dans le deuxième membre de l'équation (85).

Considérons d'abord [voir les relations (80)]

$$q'_2 = \frac{2P^2}{M^2 V_0^2},$$

dans cette expression P est le poids de l'appareil, nous pouvons donc le poser égal $P = Mg$ ou $g = 9,81 \text{ m} : \text{sec}^2$ est l'accélération de la pesanteur. Nous obtenons ainsi

$$q'_2 = \frac{2M^2 g^2}{M^2 V_0^2} = \frac{2g^2}{V_0^2} \approx \frac{200}{V_0^2},$$

or, pour tous les aéroplanes actuels la vitesse de régime est généralement supérieure à $\sqrt{200} \cong 14 \text{ m} : \text{sec}$, c'est-à-dire environ 50 km : heure, la quantité q'_2 est donc généralement inférieure à l'unité, et l'on a

$$(86) \quad 0 < q'_2 < 1,$$

car, comme il est aisé de le voir, cette grandeur est toujours positive et décroît seulement rapidement quand V_0 croît.

Considérons ensuite

$$q'_1 = \frac{2\Phi}{MV_0},$$

et envisageons le rapport

$$\frac{(q'_1)^2}{q'_2} = \frac{\{ \Phi^2 M^2 V_0^2 \}}{M^2 V_0^2 2P^2} = \frac{\Phi^2}{P^2};$$

d'où l'on a

$$q'_1 = \frac{\Phi \sqrt{2}}{P} \sqrt{q'_2}.$$

Comme $q'_2 < 1$, q'_1 sera aussi inférieur à l'unité quand on aura

$$\frac{\Phi\sqrt{2}}{P} < 1,$$

ou bien encore

$$\frac{\Phi}{P} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

or ce rapport mesure comme on l'a vu page 64, l'inclinaison de la trajectoire de la chute planée, c'est-à-dire la tangente $\tan \gamma_1$ de cet angle. Il faut donc que

$$\frac{\Phi}{P} = \tan \gamma_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A une tangente ayant une valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ correspond un angle d'environ 35° . Il faut donc pour que q'_1 soit plus petit que l'unité, que l'appareil possède un angle de chute planée inférieur à 35° . Or un angle de chute planée supérieur à 35° est une chose tout à fait inadmissible. Sous une telle inclinaison ce ne sera plus un vol plané, mais simplement une chute. Et effectivement tous les aéroplanes existant ont leur angle de chute planée généralement compris entre 10° et 20° et cet angle est même inférieur à 10° pour les appareils bons planeurs. Par conséquent pour tout aéroplane rationnellement construit on a toujours

$$(87) \quad 0 < q'_1 < 1,$$

cette quantité étant évidemment toujours positive.

On a de plus, d'après ce que nous avons vu précédemment

$$\left(\frac{q'_1}{2}\right)^2 = \frac{\Phi^2}{2P^2} q'_2;$$

d'où l'on trouve aisément que

$$\left(\frac{q'_1}{2}\right)^2 - q'_2 = q'_2 \left(\frac{\Phi^2}{2P^2} - 1\right),$$

or comme nous venons de voir, on a toujours

$$\frac{\Phi}{2P} < 1,$$

et donc *a fortiori*

$$\frac{\Phi^2}{2P^2} < 1,$$

on a donc toujours

$$\left[\left(\frac{q'_1}{2} \right)^2 - q'_2 \right] < 0,$$

et par conséquent les racines de l'équation

$$(88) \quad x^2 + q'_1 x + q'_2 = 0,$$

qui ont pour expression

$$x = -\frac{q'_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q'_1}{2} \right)^2 - q'_2},$$

sont toujours *complexes*. Comme de plus ce trinôme (88) est positif pour $x=0$, il restera donc positif pour toute valeur de x comprise entre $-\infty$ et $+\infty$.

Considérons maintenant

$$q_1 = \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0}.$$

En remarquant que $P = \lambda V_0^2 i_0$ et que $\Phi = P \tan \gamma_1$, nous pouvons écrire

$$q_1 = \frac{\frac{P}{i_0} + 3P \tan \gamma_1}{MV_0} = \frac{g \left(\frac{1}{i_0} + 3 \tan \gamma_1 \right)}{V_0},$$

comme $g \cong 10 \text{ m} : \text{sec}^2$, que i_0 est de l'ordre de $\frac{1}{10}$ et que $3 \tan \gamma_1$ est inférieur à 3, le numérateur de l'expression ci-dessus a certainement la valeur d'une centaine d'unités environ et que par conséquent

$$(89) \quad q_1 > 1,$$

car nous sommes encore bien loin de pouvoir espérer voir des aéroplanes voler à des vitesses de 100 m par seconde (360 km : h).

Considérons enfin

$$q_2 = \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2}.$$

Eu égard aux valeurs de q'_1 et q'_2 nous pouvons écrire

$$q_2 = q_1 \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} - q_2(2r-1),$$

or comme $q'_1 < 1$, que r est voisin de l'unité et que évidemment

$$\frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{M V_0} < q_1,$$

on a donc certainement toujours

$$(90) \quad q_2 < q_1.$$

De plus si l'on met q_2 sous la forme

$$q_2 = \frac{2 P^2 \left[\frac{\tan^2 \gamma_1}{i_0} + \tan^2 \gamma_1 + 1 - 2r \right]}{M^2 V_0^2},$$

Comme $\tan \gamma_1$ est pour le moins égal à $\tan \gamma_1 = 2ri_0$ ainsi que nous l'avons expliqué page 64, on voit aisément que q_2 est toujours positif.

Comme d'autre part on voit aisément que

$$\begin{aligned} \left(\frac{q_1}{2} \right)^2 - q_2 &= \frac{(\lambda V_0^2 - 3\Phi)^2}{4 M^2 V_0^2} - \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 - \Phi)}{M^2 V_0^2} - \frac{2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} \\ &= \frac{(\lambda V_0^2 - \Phi)^2}{4 M^2 V_0^2} - \frac{2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} \end{aligned}$$

et que par conséquent toujours

$$\left[\left(\frac{q_1}{2} \right)^2 - q_2 \right] > 0$$

Et partant de là, les racines de l'équation

$$(91) \quad y^2 + q_1 y + q_2 = 0$$

qui ont pour expression

$$y = -\frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q_1}{2} \right)^2 - q_2}$$

seront toujours *réelles* et distinctes et q_1 et q_2 étant positifs, elles seront de plus toujours négatives.

Montrons encore à quelle condition essentielle satisfont toujours les racines de l'équation (91).

Désignons par y_1 et y_2 les valeurs absolues des racines de cette équation. Comme il est bien connu, nous avons

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= q_1, \\ y_1 y_2 &= q_2 \end{aligned}$$

et par conséquent, eu égard à (96)

$$\gamma_1 + \gamma_2 > \gamma_1 \gamma_2$$

ou bien encore

$$\gamma_1 > \gamma_2 (\gamma_1 - 1),$$

d'où l'on a suivant que $\gamma_1 - 1 < 0$ ou que $\gamma_1 - 1 > 0$

$$\gamma_2 > \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \quad \text{pour} \quad \gamma_1 < 1,$$

$$\gamma_2 < \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \quad \text{pour} \quad \gamma_1 > 1,$$

γ_1 et γ_2 étant des nombres qui ne peuvent prendre que des valeurs positives.

Quand γ_1 variera de 0 à 1, l'expression

$$(92) \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$$

parcourra toutes les valeurs négatives comprises entre 0 et $-\infty$ et γ_2 pourra avoir une valeur quelconque comprise entre 0 et $+\infty$. Quand γ_1 variera de 1 à 2 l'expression (92) parcourra toutes les valeurs positives entre ∞ et 2, γ_2 pourra encore prendre des valeurs positives comprises entre ∞ et 0, mais quand γ_1 variera de 2 à ∞ alors l'expression (92) variera de 2 à 1 et γ_2 sera nécessairement toujours pour le moins inférieure à 2. En définitive l'équation (91) a toujours une racine dont la valeur absolue est inférieure à 2 (1),

(1) On peut même montrer que -2 sépare les deux racines de l'équation (91). En effet, ceci aura certainement lieu quand la différence des valeurs absolues des deux racines sera supérieure à deux, c'est-à-dire $\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2 > 1$. Or nous avons montré que $\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2 = \frac{(\lambda V_0^2 - \Phi)^2}{4 M^2 V_0^2} + \frac{2 P^2 (2r - 1)}{M^2 V_0^2}$ expression qui peut être mise sous la forme $\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2 = \frac{g^2}{4 V_0^2} \left[\left(\frac{1}{i_0} - \tan \gamma_1 \right)^2 + 8 (2r - 1) \right]$. Plaçons-nous dans des conditions limites pour voir quelle est la plus petite valeur que peut prendre cette expression. Prenons un appareil ayant un grand angle d'attaque $i_0 \cong 0,2$ (environ 12°); mauvais planeur, $\tan \gamma_1 = 0,4$ (environ 24°); $r = 1$, alors on trouve $\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2 \cong \frac{709}{V_0^2}$. La vitesse de cet appareil devra dépasser 90 km : h (25 m : sec.) pour que cette expression soit inférieure à l'unité. Une telle vitesse pour un appareil ayant les caractéristiques que nous avons considérées, doit être envisagée comme tout à fait irréalisable et par conséquent effectivement pour tout aéroplane de caractéristiques raisonnables $\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 - q_2 > 1$, c'est-à-dire, que l'équation (97) tout en ayant une racine inférieure à 2 en valeur absolue en aura aussi une dont la valeur absolue sera supérieure à 2.

quelles que soient les valeurs de q_1 et q_2 pourvu qu'elles soient soumises aux restrictions indiquées et qui sont exigées par la compatibilité de cette équation avec les caractéristiques d'un aéroplane. Cette limite que nous avons établie pour la valeur absolue d'une des racines de l'équation (91) doit même être considérée comme très large. C'est seulement pour abréger cette discussion des valeurs des coefficients q_1, q_2, q'_1, q'_2 que nous nous sommes abstenus de serrer cette limite de plus près. En réalité, pour toutes les valeurs de q_1 et q_2 compatibles avec les caractéristiques d'un aéroplane, la valeur absolue de la plus petite racine de l'équation (91) est toujours très voisine de l'unité et même généralement inférieure.

§6. Ceci posé, nous avons tout ce qui nous est nécessaire pour discuter la courbe (85) page 137

$$(85) \quad x = \frac{y^2 + q'_1 y + q'_2}{y(y^2 + q_1 y + q_2)}.$$

Les coefficients angulaires des directions asymptotiques de cette courbe nous sont respectivement donnés par les relations

$$\frac{xy^3}{x^4} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0,$$

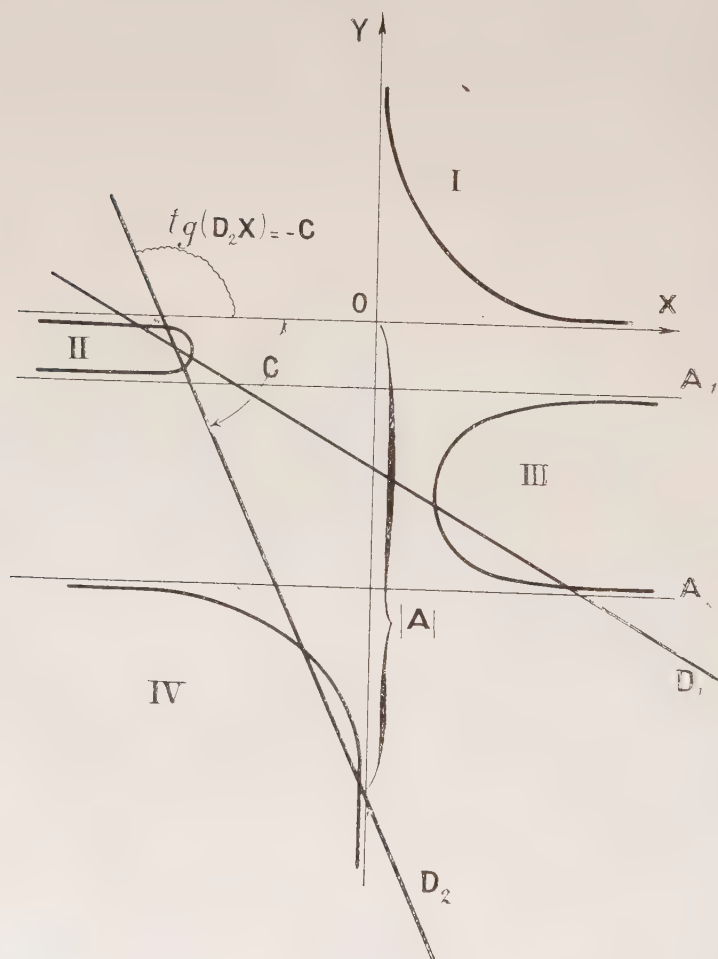
$$\frac{xy^3}{x^4} = \left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

et l'on voit aisément que cette courbe admet quatre asymptotes qui sont : l'axe des X, l'axe des Y et deux asymptotes parallèles à l'axe des X dont les ordonnées nous sont données par les racines de l'équation (91). Comme cette équation a toujours ses deux racines réelles et négatives, dont l'une est petite en valeur absolue, les deux asymptotes parallèles à l'axe des X seront toujours situées au-dessous de l'axe des X et l'une d'elle sera toujours assez rapprochée de cet axe.

Pour y variant de ∞ à 0, x est toujours positif, car pour cet intervalle des variations de y , le polynôme du second degré qui constitue le numérateur de l'équation (85) est positif, et le polynôme qui figure dans le dénominateur de cette équation a nécessairement le signe de q_2 , c'est-à-dire est aussi positif, puisque l'équation (91) n'admet pas de racines positives.

Pour y variant de 0 à $-y_1$, $-y_1$ étant la racine la plus petite en valeur absolue de l'équation (91), x est toujours négatif, car les deux polynomes de l'équation (85) conservent toujours leur signe, mais y devient négatif.

Fig. 28.



Pour y variant de $-y_1$ à $-y_2$, le polynome (91) est toujours négatif et par conséquent x toujours positif.

Pour y variant de $-y_2$ à $-\infty$, le polynome (91) étant de nouveau positif, x sera négatif dans tout cet intervalle.

Comme de plus l'on se rendra facilement compte que la courbe (85) ne coupe ni l'axe des X, ni l'axe des Y, ni aucune de ses asymptotes, on pourra aisément se convaincre, sans que nous y insistions davantage, que cette courbe aura nécessairement quatre branches qui seront toujours disposées comme il est indiqué sur la figure 28.

De la discussion qui précède, il résulte, d'une manière indiscutable, que cette allure de la courbe (85) est la seule que cette courbe puisse admettre pour toutes les valeurs possibles et imaginables des coefficients q_1, q_2, q'_1, q'_2 , qui sont compatibles avec les caractéristiques d'un aéroplane. Notons bien ce fait que l'asymptote A_1 est toujours voisine de l'axe des X et que son ordonnée est même nécessairement inférieure à 2 ainsi que nous l'avons précédemment montré. En définitive, il est impossible, à moins de tomber dans le domaine de la pure fantaisie, de concevoir un aéroplane dont la courbe (85) aurait une allure différente de celle de la figure 28 et ceci quelles que soient les dimensions et les caractéristiques qu'on veuille bien donner à l'appareil.

Cette courbe (91) nous permet de déterminer aisément quelles sont les valeurs les plus favorables au point de vue de la stabilité de l'aéroplane à adopter pour les paramètres A et C qui caractérisent le couple d'amortissement et le couple de rappel de l'appareil, si l'on a en vue la réalisation d'un aéroplane apériodique. Il suffit pour cela de couper la courbe (85) représentée sur la figure 28 par une droite, de telle manière que les ordonnées des quatre points d'intersection soient négatives. Le segment intercepté par cette droite sur l'axe des Y et changé de signe nous donnera la valeur correspondante de A, tandis que le coefficient angulaire de cette même droite, aussi changé de signe, nous donnera la valeur de C. (voir *fig.* 28). Deux catégories de droite satisfont à ces conditions. Les droites telles que D_1 qui coupent les branches II et III de notre courbe et les droites telles que D_2 qui coupent les branches II et IV. On constate de suite le fait remarquable que, quelle que soit la manière dont on mènera des droites du genre D_1 ou D_2 , toujours deux des ordonnées des points d'intersection, qui sont celles qui correspondent aux points d'intersection avec la branche II, seront petites en valeur absolue, puisque l'asymptote A_1 est nécessairement voisine de l'axe des X, et même l'une des

valeurs absolues sera excessivement petite. Or les valeurs de ces ordonnées étant les racines de notre équation caractéristique, nous sommes amenés à la conclusion suivante :

L'équation caractéristique de tout aéroplane apériodique, admet nécessairement de petites racines en valeur absolue (dans le cas de l'appareil stable) et même l'une d'elles est excessivement petite.

57. Partant de là, suivant ce que nous avons précédemment expliqué, nous pouvons dire :

Tout aéroplane apériodique est nécessairement un appareil LENT à retrouver son régime, et ceci dans les conditions les plus favorables de stabilisation.

Il est donc impossible de réaliser un aéroplane apériodique, retrouvant rapidement son régime, et, par conséquent, un appareil apériodique ne pourra jamais présenter toutes les garanties de stabilité qu'on doit exiger d'un aéroplane. Ceci, évidemment, dans le cas que suppose toute cette discussion d'un aéroplane de formes invariables et dont toutes les manœuvres sont bloquées.

Pour permettre de se rendre encore mieux compte de la nature des racines de l'équation caractéristique, nous donnons, sur la figure 29 une courbe correspondante à l'équation (85) et que nous avons tracée dans la supposition d'un aéroplane dont les caractéristiques se rapprochent, autant que possible, des caractéristiques des appareils actuellement existants ⁽¹⁾.

On voit aisément, d'après cette figure, que l'équation caractéristique a nécessairement deux de ses racines extrêmement petites en valeur absolue.

Avant de tirer de plus amples conclusions de cette discussion, nous allons encore étudier les racines complexes de notre équation caractéristique, lesquelles correspondent au cas de l'appareil périodique.

Remarquons que la courbe de la figure 29 nous permet d'avoir certaines indications sur les racines de l'équation caractéristique, dans le cas d'un appareil semi-périodique. Ce cas correspond à la

(1) Les caractéristiques ont été choisies de manière à se rapprocher autant

solution de l'équation caractéristique par des droites telles que D_3 ou D_4 qui nous donnent de suite les deux racines réelles de l'équation. Pour avoir la valeur des parties réelles des racines complexes il suffit de retrancher du coefficient de μ^3 , changé de signe dans l'équation caractéristique (81), la somme des racines réelles. La différence ainsi obtenue nous donnera le double des parties réelles cherchées. Car, comme il est bien connu, le coefficient de μ^3 , changé de signe, est égal à la somme des racines de notre équation et la valeur de ce coefficient nous est parfaitement déterminée, une fois les droites D_3 ou D_4 choisies (q_1 est connu et A est le segment intercepté par les droites D_3 ou D_4 sur l'axe des Y). On pourrait déjà ainsi se convaincre que les parties réelles des racines complexes, dans le cas de l'appareil semi-périodique,

que possible d'un biplan genre *Voisin*.

On a pris le poids total de l'appareil : $P = 500 \text{ kg}$.

La poussée résultante des hélices : $\Phi = 125 \text{ kg}$.

Ce qui correspond à un angle de chute planée : $\gamma_1 \cong 14^\circ$.

La vitesse de régime rectiligne et horizontal : $V_0 = 20 \text{ m} : \text{sec}$ ($72 \text{ km} : \text{h}$).

L'angle d'attaque du régime rectiligne et horizontal : $i_0 = \frac{1}{10}$ (environ 6°).

Surface de la voilure 50 m^2 .

De la relation $P = \lambda V_0^2 i_0$ on tire

$$\lambda = KA = \frac{P}{V_0^2 i_0} = 12,5$$

d'où

$$K = \frac{\lambda}{A} = 0,25$$

De la relation $\Phi = \lambda V_0^2 (r i_0^2 + \sigma)$ on tire, en considérant $r \cong 1$

$$\sigma = \frac{\Phi}{\lambda V_0^2} - i_0^2 = 0,015$$

Pour les coefficients de l'équation (91) on trouve respectivement les valeurs

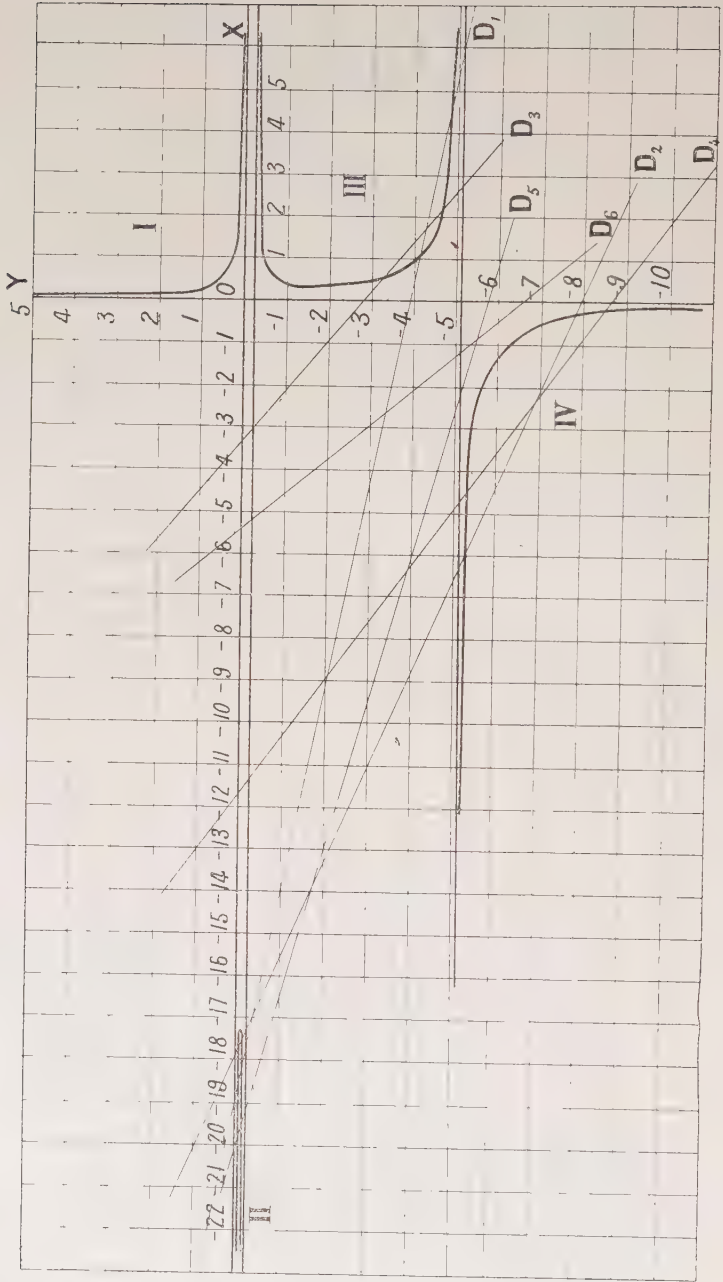
$$q_1 = 5,275; \quad q_2 = 0,752; \quad q'_1 = 0,245; \quad q'_2 = 0,481$$

Les ordonnées des deux asymptotes A_1 et A_2 ont respectivement pour valeurs

$$-y_1 \cong -0,15; \quad -y_2 \cong -5,1.$$

Remarquons enfin que les quantités q_1 , q'_1 et A ont les dimensions d'une vitesse angulaire $[T^{-1}]$; que les quantités q_2 ; q'_2 ; C ont les dimensions d'une accélération angulaire $[T^{-2}]$; que les racines de l'équation caractéristique ont pour dimension $\mu = [T^{-1}]$ et que enfin les coordonnées de la courbe (91) ont pour dimensions $x = [T]$; $y = [T^{-1}]$ de sorte que les valeurs numériques de toutes ces grandeurs ne changent, que quand on change l'unité de temps.

Fig. 29.



sont toujours petites en valeur absolue. Il va de soi qu'on n'a aucun intérêt à envisager la solution correspondante à une droite telle que D_5 , qui correspond à deux racines réelles, nécessairement petites en valeur absolue.

Les valeurs de A et de C , qui correspondent aux cas de l'appareil périodique, nous sont données par des droites telles que D_6 , qui ne coupent aucune des branches de la courbe (85) figure 29.

VI. — ÉTUDE DES RACINES COMPLEXES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE.

§8. Nous allons commencer par établir une méthode ⁽¹⁾ qui nous permettra de suivre aisément les variations des parties réelles des racines complexes d'une équation algébrique, en ayant spécialement en vue une équation du quatrième degré comme l'est notre équation caractéristique.

Soit donc

$$(93) \quad f(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4,$$

l'équation dont nous voulons étudier les racines complexes; envisageons d'abord le cas où les quatre racines de cette équation sont complexes.

A la base de toutes nos considérations, nous allons mettre le théorème de Cauchy, suivant lequel le nombre de zéros d'une fonction $f(z)$ d'une variable complexe z , contenus dans un contour fermé, est donné par la valeur de l'intégrale

$$(94) \quad N = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

prise suivant tout le contour, dans le cas où le contour considéré n'embrasse aucun pôle et $f(z)$ ne s'annule pas sur le contour.

Si dans l'intégrale ci-dessus on considère $f(z)$ sous la forme

$$(95) \quad f(z) = \rho e^{i\varphi},$$

(¹) La méthode ci-après est une application de la méthode des indices de Cauchy. Consulter à ce sujet: E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, 2^e édition, 1905, p. 195, III, Paris. — E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 1^{re} édition, 1905, § 307, p. 126, Paris.

ou φ est l'argument de la fonction $f(z)$ et ρ sa valeur absolue, alors cette intégrale se réduit à

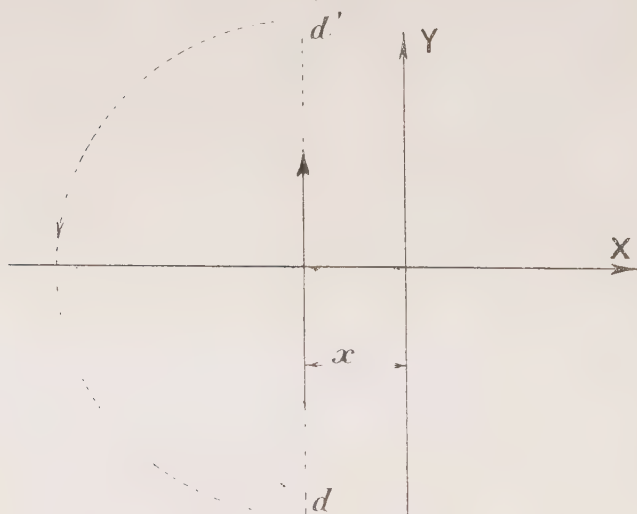
$$(96) \quad N = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi,$$

Ce qui revient à dire que le nombre de zéros de $f(z)$ contenus dans le contour considéré, est égal au nombre de fois que l'argument φ s'accroît de 2π quand z parcourt une fois tout le contour fermé.

Notre but est d'étudier les parties réelles des racines de l'équation (93) qui sont dans la forme

$$z = x + iy.$$

Fig. 30.



Pour cela nous avons recours à l'artifice suivant. Considérons dans le plan de la variable z (plan des XY) un contour *mobile* constitué de la manière suivante : Une droite infinie dd' parallèle à l'axe des Y et un demi cercle de rayon infini, disposés de telle manière que le contour ainsi formé embrasse tout le domaine situé à gauche de la droite dd' (voir *fig. 30*). La position de ce contour dans le plan des XY est parfaitement définie par l'abscisse x de la droite dd' . En faisant varier cette abscisse x de $+\infty$ à $-\infty$ notre contour balayera tout le plan de la variable z .

Promenons le contour ainsi défini parallèlement à l'axe des X. En observant comment varie le nombre de zéros contenus dans ce contour, on pourra aisément suivre la variation des parties réelles des racines de notre équation (93). En effet, chaque fois que le nombre de zéros, contenus dans notre contour, aura varié de deux unités, [on conçoit aisément que comme notre contour est limité par la droite dd' , parallèle à l'axe des Y, et que son mouvement se fait parallèlement à l'axe des X, le nombre de zéros contenus dans ce contour ne peut varier que par paires, puisque les racines complexes d'un polynôme tel que $f(z)$, dont les coefficients sont réels, sont nécessairement, deux à deux, conjuguées], ce sera l'indice que la droite dd' aura coupé une paire de racines conjuguées de notre équation, et l'abscisse de la droite dd' nous renseignera à ce moment sur la valeur de la partie réelle des racines qui viennent de sortir du contour.

Si l'on avait voulu étudier les valeurs absolues des parties purement imaginaires des racines d'une équation telle que (93), il aurait suffi de considérer pour cela un contour semblable au contour précédemment envisagé, mais seulement tel que la droite dd' soit parallèle à l'axe des X. Comme les racines d'une équation à coefficients réels sont symétriquement disposées, par rapport à l'axe des X, il suffit, même dans ce cas, de faire voyager un tel contour, seulement par exemple, dans le domaine des y positifs, pour être complètement renseigné. Mais revenons à l'étude des parties réelles des racines.

Pour calculer l'intégrale qui figure dans l'expression (96), quand z parcourt le contour que nous avons ci-dessus indiqué, on peut procéder comme suit :

Calculons d'abord l'intégrale $\int d\varphi$ pour z parcourant de $-\infty$ à $+\infty$ la droite dd' de notre contour.

Pour cela, substituons dans $f(z)$ la variable z par son expression $z = x + iy$. Nous avons

$$f(x + iy) = y^4 - iy^3 \frac{f'''(x)}{3!} - y^2 \frac{f''(x)}{2!} + iy f'(x) + f(x),$$

$f(z)$ se met alors sous la forme

$$(97) \quad f(z) = u + iv$$

avec

$$u = y^4 - y^2 \frac{f''(x)}{2!} + y f(x),$$

$$v = -y^3 \frac{f'''(x)}{3!} + y f'(x),$$

expressions dans lesquelles $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ sont les dérivées successives de $f(x)$ et qui ont respectivement pour valeur

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6a_1 x + 2a_2$$

$$f'''(x) = 24x + 6a_1.$$

Introduisons les notations

$$(98) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{f'''(x)}{3!} = 4x + a_1, \\ \psi_2 = \frac{f''(x)}{2!} = 6x^2 + 3a_1 x + a_2, \\ \psi_3 = f'(x) = 4x^3 + 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3, \\ \psi_4 = f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \end{cases}$$

ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 sont ainsi des polynomes en x respectivement du premier, second, troisième et quatrième degré. Avec ces notations nous avons

$$(99) \quad \begin{cases} u = y^4 - \psi_2 y^2 + \psi_4 \\ v = -\psi_1 y^3 + \psi_3 y. \end{cases}$$

On peut aisément suivre la variation de l'argument φ de la fonction $f(z)$, quand z parcourt la droite de notre contour de $-\infty$ à $+\infty$ (alors x reste constant et y varie de $-\infty$ à $+\infty$), en suivant les variations de signe de la partie réelle et de la partie purement imaginaire de $f(z)$, c'est-à-dire les variations de signe de u et de v . En effet, soit m le nombre de fois que le contour parcouru par $f(z)$ coupe l'axe des v dans le sens positif et n le nombre de fois que ce contour coupe ce même axe dans le sens négatif. Alors évidemment

$$(100) \quad \frac{1}{2\pi i} \int dz = \frac{m-n}{2}$$

pour z parcourant la droite de notre contour. D'autre part, considérons $f(z)$ parcourant son contour. Quand u s'annule en passant de $u > 0$ à $u < 0$ et que v est positif, alors $f(z)$ coupe l'axe des v dans le sens positif. Il en est de même quand v est négatif et u s'annule en passant de $u < 0$ à $u > 0$. Dans lès deux cas, quand $f(z)$ coupe l'axe des v , dans le sens positif, le système $(u, -v)$ perd une variation de signe. On peut de même voir aisément que, quand $f(z)$ coupe l'axe des v , dans le sens négatif, le système $(u, -v)$ gagne une variation de signe. Le nombre de variations de signes perdues par le système $(u, -v)$ quand y varie de $-\infty$ à $+\infty$ sera donc égal à la différence $m - n$. Ce nombre de variations de signe du système $(u, -v)$ peut être déterminé par le procédé employé dans le théorème de Sturm. Pour cela, nous n'avons qu'à effectuer sur u et $-v$ la suite d'opérations employées pour la recherche du plus grand commun diviseur. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} u &= (-v)q_1 - r_1, \\ (-v) &= r_1q_2 - r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 - r_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Le nombre s de variations perdues par la suite

$$u; \quad -v; \quad r_1; \quad r_2; \quad r_3; \quad \dots,$$

Quand on y substitue $y = -\infty$ et $y = +\infty$ est égal au nombre $m - n = s$ cherché.

Quand z parcourt le demi-cercle de rayon infini, la variation de l'argument de $f(z)$ est la même que la variation de l'argument de z^4 . Or, cette dernière variation est, comme il est bien connu, égale à $2(2\pi)$.

En définitive, le nombre de zéros contenus dans notre contour est donc égal à

$$(101) \quad N = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi = 2 + \frac{s}{2}.$$

Calculons la suite de Sturm pour notre cas. On obtient

$u,$	$-v,$	$r_1,$	$r_2,$	$r_3,$
$y^4 - \psi_2 y^2 + \psi_1$	$\psi_1 y^3 - \psi_1 y$	$y^2 \frac{\psi_2 \psi_1 - \psi_1^2}{\psi_1} - \psi_1$	$y \frac{\psi_1 \psi_2 \psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2 \psi_1}{\psi_2 \psi_1 - \psi_3}$	ψ_1

Chaque terme de cette suite pour $\gamma = -\infty$ a respectivement les signes des termes de la suite.

$u.$	$-\varphi.$	$r_1.$	$r_2.$	$r_3.$
$+1$	$-\psi_1$	$\frac{\psi_1\psi_2 - \psi_3}{\psi_1}$	$-\frac{\psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4}{\psi_1\psi_2 - \psi_3}$	ψ_4

et pour $\gamma = +\infty$ des termes de la suite

$u.$	$-\varphi.$	$r_1.$	$r_2.$	$r_3.$
$+1$	ψ_1	$\frac{\psi_1\psi_2 - \psi_3}{\psi_1}$	$\frac{\psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4}{\psi_1\psi_2 - \psi_3}$	ψ_4

Pour que les 4 racines de notre équation $f(z)$ soient toutes comprises dans notre contour, il faut que $N = 4$, par conséquent $s = 4$. Il faut, pour cela, que les deux suites de Sturm ci-dessus aient l'aspect :

$$\begin{aligned} \text{Pour } \gamma = -\infty; & \quad + - + - +, \\ \text{Pour } \gamma = +\infty; & \quad + + + + +, \end{aligned}$$

qui est la seule combinaison qui donne $s = 4$. Il faut donc que l'on ait

$$(102) \quad \psi_1 > 0; \quad \psi_1\psi_2 - \psi_3 > 0; \quad \psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4 > 0; \quad \psi_4 > 0.$$

Le système d'inégalité ci-dessus, constitue les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines de l'équation $f(z)$ soient comprises dans le contour considéré.

Comme

$$\psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4 = \psi_3(\psi_1\psi_2 - \psi_3) - \psi_1^2\psi_4.$$

On voit aisément que le système d'inégalités (102) est équivalent au système ci-après.

$$(103) \quad \psi_1 > 0; \quad \psi_2 > 0; \quad \psi_3 > 0; \quad \psi_4 > 0; \quad \psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4 > 0.$$

Ce système d'égalités nous donne de suite les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients d'une équation du quatrième degré pour que ses racines aient toutes leurs parties réelles négatives. Il faut pour cela que notre contour embrasse tout le domaine des x négatifs et que toutes les

racines de notre équation y soient contenues. Il suffit pour cela que, pour $x = 0$ les inégalités (103) soient remplies. Pour cette valeur de x ; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ ont respectivement les valeurs que les relations (98) nous donnent directement

$$\psi_1 = a_1; \quad \psi_2 = a_2; \quad \psi_3 = a_3; \quad \psi_4 = a_4$$

et l'on est ainsi amené aux inégalités de *Routh*

$$(104) \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \quad a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0,$$

dont ont fait usage tous les auteurs qui jusqu'ici se sont occupés de la discussion du problème de la stabilité longitudinale de l'aéroplane.

Revenons aux systèmes d'inégalités (103).

Supposons que notre équation a toutes les parties réelles de ces racines négatives, puisque c'est le cas qui nous intéresse spécialement. Alors les inégalités (104) ont lieu. Considérons x variant d'une manière continue de 0 à $-\infty$ et observons comment se comportent les expressions

$$(105) \quad \psi_1; \quad \psi_2; \quad \psi_3; \quad \psi_4; \quad \psi_1 \psi_2 \psi_3 - \psi_3^2 - \psi_1^2 \psi_4 = H$$

qui sont des polynômes en x et qui figurent dans les premiers membres des inégalités (103). Sitôt qu'une quelconque de ces expressions, qui sont toutes positives pour $x = 0$, change de signe, on voit aisément que le nombre des variations de signe s passe de suite de 4 à 0 et une paire de racines conjuguées sort de notre contour. Les expressions (105) ne peuvent changer de signe qu'en s'annulant. Considérons donc le système d'équations

$$(106) \quad \psi_1 = 0; \quad \psi_2 = 0; \quad \psi_3 = 0; \quad \psi_4 = 0; \quad H = 0.$$

Soit $-\alpha$ la plus petite racine en valeur absolue de l'une quelconque de ces équations. Montrons que $-\alpha$ est nécessairement racine de l'équation $H = 0$. En effet, remarquons d'abord que comme l'équation (93) est supposée ne pas avoir de racines réelles ψ_4 ne s'annule pour aucune valeur de x et comme pour $x = 0$; $\psi_4 > 0$ cette expression reste donc toujours positive pour toute valeur réelle de x . D'autre part, pour $x = 0$ on a $H > 0$ et pour une valeur de x qui satisfait à l'une quelconque des équations $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = 0$; $\psi_3 = 0$, H devient négatif, comme il est bien aisé

de le voir. Par conséquent, H a nécessairement un nombre impair de racines réelles inférieures à l'une quelconque des racines des équations $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = 0$; $\psi_3 = 0$. α est donc bien racine de l'équation $H = 0$ et toutes les racines des équations $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = 0$; $\psi_3 = 0$ sont nécessairement supérieures en valeur absolue à α .

59. Ceci posé, revenons à l'équation caractéristique (81) de l'aéroplane. Pour cette équation nous avons

$$a_1 = A + q_1; \quad a_2 = Aq_1 + q_2 + C; \quad a_3 = Aq_2 + Cq'_1$$

et l'équation $\psi_3 = 0$ est alors de la forme

$$(107) \quad 4x^3 + 3(A + q_1)x^2 + 2(Aq_1 + q_2 + C)x + Aq_2 + Cq'_1 = 0.$$

Il est aisé de se convaincre que cette équation a nécessairement au moins une racine comprise entre 0 et -1 . En effet, pour $x = 0$ le premier membre de cette équation est positif. Pour $x = -1$ il se réduit à

$$-4 + 3(A + q_1) - 2(Aq_1 + q_2 + C) + Aq_2 + Cq'_1$$

ou bien encore

$$(108) \quad -(A - 2)(2q_1 - q_2 - 3) - C(1 - q'_1) - (q_1 - 2),$$

Or, si nous nous rappelons que l'équation (91) page 141 a nécessairement une racine inférieure à 2 en valeur absolue, nous pouvons écrire que nécessairement

$$4 - 2q_1 + q_2 < 0,$$

inégalité qui peut se mettre sous la forme

$$2q_1 - q_2 - 3 > 1.$$

Eu égard à cette condition, on voit que dans l'expression (108) le premier terme est nécessairement négatif, car tout aéroplane présente toujours un certain amortissement, qui, dans nos unités, doit être estimé, pour le moins, à plusieurs unités. Ce terme, tout en étant négatif, est donc supérieur à l'unité, en valeur absolue. Le second terme est évidemment aussi toujours négatif, car suivant (87) p. 139, on a $q'_1 < 1$. Enfin, le troisième terme, s'il n'est pas

négalif, ce qui a presque toujours lieu, est certainement inférieur à l'unité, car $q_4 > 1$. Par conséquent, l'expression (108) est donc nécessairement négative et ceci pour toutes les valeurs admissibles de q_1, q_2, q'_1, C et A (en ce qui concerne l'amortissement rigoureusement parlant pour $A > 3$, mais disons le encore une fois, $A < 3$ est, pratiquement, presque irréalisable). L'équation (107) a donc nécessairement une racine comprise entre 0 et -1 et par conséquent notre équation caractéristique (81), dans le cas de toutes ses racines complexes, avec parties réelles négatives, a nécessairement une paire de racines conjuguées dont la partie réelle est comprise entre 0 et -1 . Il est *impossible* de réaliser un aéroplane dont l'équation caractéristique n'ait pas cette particularité.

On conçoit aisément que toute cette discussion subsiste dans le cas où l'équation caractéristique (81) aurait deux racines réelles négatives et supérieures à l'unité en valeur absolue. Car alors, ϕ_4 reste, comme précédemment, positif pour toute la valeur de x comprise entre 0 et -1 . Par conséquent, dans la solution de l'équation caractéristique (81) par des droites telles que D_3 et D_4 (fig. 29) la partie réelle des deux racines complexes conjuguées est nécessairement inférieur à l'unité en valeur absolue.

En définitive, nous pouvons dire :

60. *Tout aussi bien, dans le cas de l'appareil périodique que dans le cas de l'appareil semi-périodique, l'équation caractéristique de l'aéroplane admet nécessairement une paire de racines conjuguées dont la partie réelle, quand elle est négative, est inférieure à l'unité en valeur absolue et ceci quelles que soient les caractéristiques de l'aéroplane considéré.*

Nous sommes par conséquent amenés à la constatation fondamentale suivante :

Tout aéroplane, considéré comme un système invariable, c'est-à-dire quand toutes ses manœuvres sont bloquées, qu'il soit apériodique ou périodique est nécessairement un appareil LENT à retrouver son régime et ceci quelles que soient ses dimensions et autres caractéristiques.

Cette conclusion met en relief une des principales propriétés de l'aéroplane, à savoir la lenteur de l'amortissement des déviations

de l'appareil, subies à partir de son régime. C'est une propriété générale du système aéroplane. Il est impossible de réaliser un aéroplane ne la possédant pas. Cette conclusion paraîtra certainement quelque peu inattendue. On a toujours eu la certitude instinctive qu'en donnant à l'aéroplane des formes appropriées, en le munissant d'empennages horizontaux convenables, on pourrait arriver à construire un aéroplane présentant toutes les garanties de stabilité complète, et ceci sans nécessiter le contrôle continu de sa stabilité par quelque organe mobile mû, soit automatiquement, soit par le pilote. Malheureusement ce n'était qu'une espérance mal fondée, et comme il résulte de toute la discussion précédente, c'est un fait irrémédiable. Un aéroplane ne peut pas être rendu parfaitement stable, comme un navire par exemple, rien que par ses formes extérieures. On ne doit donc espérer voir l'aéroplane rendu complètement stable que par quelque dispositif *mobile*, spécialement chargé de stabiliser l'appareil. Avant d'indiquer dans quelle voie doivent être cherchés ces dispositifs stabilisateurs, arrêtons-nous d'abord sur les principales conclusions qui découlent de toute la discussion précédente relative à la stabilité longitudinale de l'aéroplane et qui s'imposent pour la pratique de la construction de ces appareils.

VII. — LES CONCLUSIONS RELATIVES A LA STABILITÉ LONGITUDINALE.

Nous avons vu que l'aéroplane, quel qu'il soit, périodique ou apériodique est un appareil essentiellement lent à retrouver son régime, même dans les conditions les plus favorables pour sa stabilité. Par conséquent, suivant ce qui a été précédemment exposé à tous les points de vue, toutes les préférences doivent aller à l'*aéroplane apériodique*, c'est-à-dire à l'appareil incapable d'oscillations périodiques. Nous considérerons, par conséquent, l'apériodicité comme une des premières qualités de l'aéroplane et c'est de la réalisation de l'appareil apériodique que nous nous occuperons uniquement.

Jusqu'ici, nous avons uniquement envisagé les petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime horizontal. Rendons nous brièvement compte quelles sont les modifications qui peuvent

intervenir dans les équations des petits mouvements de l'aéroplane, en envisageant les oscillations de l'appareil autour d'un quelconque des régimes que nous avons examinés aux paragraphes 25 à 28.

61. De la stabilité de l'aéroplane autour d'un régime quelconque. — Si l'on s'en rapporte à ce qui a été dit aux paragraphes 24 à 28, on verra que les caractéristiques des régimes, horizontal, ascendant et descendant en air calme, se retrouvent dans tous les autres régimes et que par conséquent, il nous suffira d'examiner comment se comporte l'aéroplane autour de ces premiers régimes pour être, en général, fixé sur cette question.

Rendons-nous donc compte comment seront modifiées les équations des petits mouvements de l'aéroplane, autour d'un régime ascendant par exemple, d'inclinaison γ_1 de sa trajectoire sur l'horizon.

Si l'on compare entre elles les figures 5 et 7, des paragraphes 24 et 25, on verra immédiatement que si dans le cas du régime ascendant on prend pour axes des X et Y , les directions V_1 et N , les équations des petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime ascendant seront identiques en forme aux équations (76), page 125, et c'est seulement les caractéristiques du régime V_0 et i_0 qui y interviennent, qui seront modifiées et seront remplacées par les valeurs V_1 et i_1 , correspondantes au régime ascendant considéré. Il en sera de même pour tout autre régime que l'on aurait à considérer. Or, comme il résulte de toute la discussion précédente, les petites variations de la vitesse et de l'angle d'attaque de l'appareil sont sans grande influence sur les racines de l'équation caractéristique, par conséquent, quand l'aéroplane passera d'un régime à un autre régime voisin, les conditions de stabilité ne seront presque pas modifiées. Toutefois certaines modifications seront introduites dans les équations des petits mouvements relatives à la chute planée de l'aéroplane, car, dans ce cas, un facteur, la poussée des hélices, disparaît du problème. Il est fort aisé de voir, en employant les mêmes notations que précédemment, en prenant pour axes des X et Y la direction de la vitesse V_0 de régime de chute planée et la normale à cette vitesse dirigée vers le haut et en désignant [par γ_1 l'inclinaison de V_0 sur l'horizon, que les équations

tions des petits mouvements sont dans ce cas de la forme

$$(109) \quad \begin{cases} M \frac{dv}{dt} = -\gamma P \cos \gamma_1 - 2P r j \cos \gamma_1 - \frac{2P \sin \gamma_1}{V_0} v, \\ MV_0 \frac{d\gamma_1}{dt} = \lambda V_0^2 j + \frac{2P \cos \gamma_1}{V_0} v - \gamma P \sin \gamma_1, \\ I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -c V_0^2 j - a V_0 \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} j &= \varphi - \gamma, \\ P \cos \gamma_1 &= \lambda V_0^2 i_0, \\ P \sin \gamma_1 &= \lambda V_0^2 (r i_0^2 + \sigma) \end{aligned}$$

(comparer avec le système (76), page 125) auquel système d'équations correspond l'équation caractéristique

$$(110) \quad \begin{aligned} &\mu^4 + \mu^3 \left(\frac{a V_0}{I} + \frac{3P \sin \gamma_1 + \lambda V_0^2}{M V_0} \right) \\ &+ \mu^2 \left(\frac{a V_0}{I} \frac{3P \sin \gamma_1 + \lambda V_0^2}{M V_0} + \frac{2P \sin \gamma_1 (P \sin \gamma_1 + \lambda V_0^2) - 2P^2 \cos^2 \gamma_1 (2r - 1)}{M^2 V_0^2} + \frac{c V_0^2}{I} \right) \\ &+ \mu \left(\frac{a V_0}{I} \frac{2P \sin \gamma_1 (P \sin \gamma_1 + \lambda V_0^2) - 2P^2 \cos^2 \gamma_1 (2r - 1)}{M^2 V_0^2} + \frac{c V_0^2}{I} \frac{3P \sin \gamma_1}{M V_0} \right) \\ &- \frac{c V_0^2}{I} \frac{2P^2}{M^2 V_0^2}. \end{aligned}$$

En remarquant que comme γ_1 , est toujours un petit angle, on a sensiblement $\sin \gamma_1 \cong \gamma_1$, $\cos \gamma_1 \cong 1$ et que $P \gamma_1 = \Phi$ et en ayant recours aux abréviations (80) indiquées page 135, nous obtenons :

$$(111) \quad \mu^4 + \mu^3 (A + q_1) + \mu^2 (A q_1 + q_2 + C) + \mu (A q_2 + C q_1'') + C q_2' = 0$$

avec

$$q_1'' = \frac{3\Phi}{M V_0},$$

équation qui ne diffère de l'équation (81) que par le coefficient de μ et où q_1' est remplacé par q_1'' , grandeur très peu différente de q_1' . On pourra aisément se convaincre que les racines de cette équation (111) ne diffèrent presque pas des racines de l'équation (79) et que par conséquent, même dans le régime de chute planée, les conditions de stabilité ne diffèrent pas de celles du régime horizontal.

Une circonstance peut pourtant venir troubler les conditions de

stabilité dans les divers régimes. C'est la manœuvre du gouvernail de profondeur. Pour passer en effet d'un régime à un autre il faut avoir recours au gouvernail de profondeur pour modifier l'angle d'attaque de l'appareil. Mais comme nous l'avons vu au paragraphe 43 cette manœuvre modifie sensiblement le couple central de l'aéroplane et par conséquent le facteur C qui est de la forme

$$C = \frac{c V_0^2}{I}$$

et qui varie avec la constante c du couple central. Or une variation de C correspond à une rotation de la droite telle que D_2 par exemple (voir *fig.* 29) qui nous donne la solution de l'équation caractéristique, autour de son point d'intersection avec l'axe des Y puisque le facteur d'amortissement A reste toujours très sensiblement constant indépendamment de l'orientation du gouvernail de profondeur. Cette variation de C peut ainsi amener la droite D_2 à être tangente à la branche II (c'est la tangence à la branche II qui généralement se produira d'abord quand A a une valeur choisie avec une certaine marge). A ce moment l'équation caractéristique admettra deux racines réelles, égales et très petites en valeur absolue puisque l'asymptote A_1 est nécessairement très voisine de l'axe de X et ainsi que nous l'avons expliqué au paragraphe 53, l'aéroplane sera dans ce cas essentiellement instable. On doit donc envisager les variations limites possibles de C et faire en sorte que jamais la droite D_2 ne puisse devenir tangente à aucune des branches de la courbe qui nous fournit les solutions de l'équation caractéristique.

62. Détermination des dimensions de l'aéroplane les plus favorables à sa stabilité. — L'aéroplane est un appareil lent à retrouver son régime, et c'est pourquoi il ne peut être considéré comme répondant à toutes ses exigences d'une stabilité certainement assurée dans tous les cas. Mais en air calme ou bien par un vent régulier peu variable l'aéroplane apériodique peut être considéré comme stable et c'est seulement dans des conditions atmosphériques assez variables que sa stabilité laissera à désirer. Pour assurer la stabilité de l'appareil en air calme il faut que les racines de l'équation caractéristique soient réelles et négatives, ce qu'on

peut toujours atteindre par des valeurs appropriées des facteurs A et C qui caractérisent l'amortissement et le couple de rappel de l'appareil. Pour déterminer ces valeurs on tracera pour l'appareil considéré d'après l'équation (85) une courbe telle que celle qui est représentée sur la figure 29. Il suffira de déterminer quelques points des branches II, III et IV et l'on choisira la solution de l'équation caractéristique par des droites telles que D₁ ou D₂, de préférence par une droite telle que D₂. On aura égard aux variations de C dues à la manœuvre du gouvernail de profondeur ainsi qu'aux variations de A et de C dues à la variation de la vitesse de l'appareil quand ce dernier passera d'un régime à un autre et on vérifiera qu'en aucun cas, la droite qui nous fournit la solution de l'équation caractéristique n'est tangente à aucune des branches de la courbe (85). La droite ayant été tracée dans sa position moyenne, on aura de suite les valeurs de A et de C cherchées. Cette détermination peut évidemment se faire d'autant plus exactement que nous sont mieux connues les caractéristiques de l'aéroplane. Déjà, avec nos connaissances actuelles des lois de la résistance de l'air, on peut trouver des résultats d'une certaine approximation. On trouvera dans cette étude tous les éléments nécessaires pour effectuer de tels calculs et nous n'y insisterons pas. Une fois A et C déterminés on aura de suite

$$\frac{AI}{V_0} = a; \quad \frac{CI}{V_0^2} = c$$

qui sont les coefficients d'amortissement et du couple central, auxquels on pourra toujours donner les valeurs nécessaires en munissant l'appareil d'un empennage horizontal suffisant, qui sera évidemment une queue. Le calcul de a et de c exige la connaissance du mouvement d'inertie I de l'appareil par rapport à un axe normal au plan de symétrie et passant par le centre de gravité. Dans la première partie de cette étude nous avons donné les formules permettant, d'après les valeurs de a et de c , de déterminer les dimensions des empennages horizontaux. La fraction du couple d'amortissement et du couple central de l'appareil fournie par la voilure principale est généralement faible et peut être négligée dans une première approximation. Dans la détermination des dimensions des empennages horizontaux on aura même la latitude de se fixer

a priori une de leurs dimensions. On fera évidemment ce choix en se guidant par des considérations de construction de l'appareil.

On peut aisément voir, d'après tout ce qui précède, que la vitesse de régime de l'aéroplane ne joue nullement le rôle si essentiel qu'on lui attribue généralement. Cette opinion ne repose du reste que sur un malentendu ⁽¹⁾. A n'importe quelle vitesse l'aéroplane peut être rendu tout aussi stable qu'à une vitesse quelconque, et l'aéroplane à grande vitesse ne présente aucun avantage, spécialement marqué au point de vue de la stabilité, sur les appareils à vitesse moyenne. Il ne faut donc pas s'attendre à voir les aéroplanes marchant à des vitesses de 150^{km} à l'heure être des merveilles de stabilité. C'est une croyance tout à fait illusoire et qui est dénuée de tout fondement.

63. De la recherche des procédés de stabilisation de l'aéroplane. — L'aéroplane muni d'empennages horizontaux déterminés comme ci-avant indiqué, ne peut pas être considéré comme présentant toutes les garanties d'une stabilité parfaite. Pour réaliser l'aéroplane parfaitement stable, il faut nécessairement avoir recours à des artifices spéciaux de stabilisation, qui doivent être, ainsi qu'il ressort de la discussion précédente, d'un caractère essentiellement mobile. Si nous voulons que ces dispositifs soient d'action automatique, il est évident que leur fonctionnement ne pourra être lié qu'à la variation des paramètres qui déterminent la déviation de l'appareil et qui varient quand le régime de l'aéroplane est troublé. Ses paramètres sont φ , γ et ν (voir *fig.* 25, p. 123). Puisque nous n'avons à envisager que les petits mouvements de l'appareil, on a évidemment à considérer que des fonctions linéaires de φ , γ et ν . L'action du dispositif stabilisateur se traduira par certains termes

⁽¹⁾ MM. Bryan et Williams dans leur étude de la stabilité longitudinale de l'aéroplane [*loc. cit.* en Note ⁽¹⁾, p. 117] n'ayant pas suffisamment explicité le problème ont cru observer dans leur discussion que la vitesse se dégageait comme critère de stabilité. Mais plus tard M. Bryan est revenu sur son opinion et a reconnu, ainsi que l'avait fait remarquer Ferber, qui a justement poursuivi sa discussion dans ce sens, que la stabilité de l'aéroplane devait effectivement dépendre des caractéristiques des proportions de l'appareil. Voir F. FERBER, *L'Aviation, ses débuts, son développement*, Paris 1908, p. 210, note ⁽¹⁾.

complémentaires dans les équations des petits mouvements de l'aéroplane, et si l'action du dispositif stabilisateur est vraiment efficace, l'équation caractéristique correspondant à ce système d'équations sera modifiée d'une telle manière qu'elle pourra admettre toutes ces racines réelles, négatives et toutes grandes en valeur absolue. Alors dans de telles conditions toute déviation de l'aéroplane serait énergiquement réprimée et l'on aurait effectivement un aéroplane pratiquement complètement stable dans la plus large acception du mot. Pour la recherche des dispositifs stabilisateurs il faut donc essayer d'introduire dans le système d'équations des petits mouvements de l'aéroplane des termes supplémentaires fonctions linéaires de φ , γ et v , et voir s'ils nous amènent aux modifications désirables de l'équation caractéristique. On examinera ensuite comment réaliser pratiquement les dispositifs introduisant ces termes complémentaires dans l'équation caractéristique. Les méthodes précédemment indiquées pour la discussion de l'équation caractéristique permettent de poursuivre de telles recherches sans aucune difficulté. Comme le but de cette étude est simplement d'étudier le problème de la stabilité de l'aéroplane et non pas d'examiner les conditions techniques de sa réalisation, je ne m'arrêterai pas ici sur les nombreux et pratiquement importants résultats qui peuvent être obtenus dans cette voie.

Je ne traiterai dans l'ordre d'idées indiqué, pour illustrer la méthode, que la question de l'influence de la décentration des hélices sur la stabilité de l'aéroplane.

VIII. — INFLUENCE DE LA DÉCENTRATION DES HÉLICES.

64. Nous avons vu au paragraphe 41 que, quand la poussée des hélices ne passe pas par le centre de gravité de l'aéroplane, le couple central a pour expression

$$(60) \quad \Gamma = h V_0 (V - V_0) + \left(c - \frac{h}{2 i_0} \right) V_0^2 (i_0 - i),$$

il est fonction tout aussi bien de la variation de l'angle d'attaque que de la variation de la vitesse de l'appareil.

Pour obtenir dans ce cas les équations des petits mouvements

de l'appareil autour de son régime horizontal rectiligne, il suffit de remplacer dans le système d'équations (76) le terme relatif au couple central par sa nouvelle expression (60). Nous obtenons ainsi

$$(112) \quad \begin{cases} M \frac{dv}{dt} = -P\gamma - 2Prj - \frac{2\Phi}{V_0} v, \\ MV_0 \frac{d\gamma}{dt} = (\lambda V_0^2 + \Phi)j + \frac{2P}{V_0} v, \\ I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = hV_0 v - \left(c - \frac{h}{2i_0}\right) V_0^2 j - \alpha V_0 \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

avec

$$j = (i - i_0) = \varphi - \gamma; \quad v = V - V_0.$$

Ce système d'équations diffère du système (76) par ce fait que la troisième de ces équations contient dans son second membre un terme supplémentaire en v et qui est dû à la décentration des hélices.

L'équation caractéristique de ce système (112) est de la forme

$$(113a) \quad \begin{vmatrix} \mu + \frac{2\Phi}{MV_0} & -\frac{P(2r-1)}{M} & \frac{2Pr}{M} \\ -\frac{2P}{MV_0^2} & \mu + \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} & -\frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{MV_0} \\ -\frac{hV_0}{I} & -\left(c - \frac{h}{2i_0}\right) \frac{V_0^2}{I} & \mu^2 + \frac{\alpha V_0}{I} \mu + \left(c - \frac{h}{2i_0}\right) \frac{V_0^2}{I} \end{vmatrix} = 0$$

ou bien encore développée :

$$(113b) \quad \begin{aligned} & \mu^4 + \mu^3 \left[\frac{\alpha V_0}{I} + \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0} \right] \\ & + \mu^2 \left[\frac{\alpha V_0}{I} \frac{\lambda V_0^2 + 3\Phi}{MV_0} + \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} + \left(c - \frac{h}{2i_0}\right) \frac{V_0^2}{I} \right] \\ & + \mu \left[\frac{\alpha V_0}{I} \frac{2\Phi(\lambda V_0^2 + \Phi) - 2P^2(2r-1)}{M^2 V_0^2} + \left(c - \frac{h}{2i_0}\right) \frac{V_0^2}{I} \frac{2\Phi}{MV_0} - \frac{hV_0}{I} \frac{2Pr}{M} \right] \\ & + \left(c - \frac{h}{2i_0}\right) \frac{V_0^2}{I} \frac{2P^2}{M^2 V_0^2} + \frac{hV_0}{I} \frac{P(\lambda V_0^2 + \Phi)}{M^2 V_0} \end{aligned}$$

[comparer aux équations (78) et (79)].

En employant les abréviations (80), page 135, et en posant en outre

$$(114) \quad \begin{cases} \frac{2Pr}{M} = q_1'; & \frac{P(\lambda V_0^2 + \Phi)}{M^2 V_0^2} = q_2'; \\ H = \frac{hV_0}{I}, \end{cases}$$

nous obtenons

$$(115) \quad \mu^3 + \mu^3 [A + q_1] + \mu^2 \left[A q_1 + q_2 + \left(C - H \frac{V_0}{2 i_0} \right) \right] \\ + \mu \left[A q_2 + \left(C - H \frac{V_0}{2 i_0} \right) q'_1 + H q''_1 \right] \\ + \left(C - H \frac{V_0}{2 i_0} \right) q'_2 + H q''_2.$$

Avant d'aborder la discussion de cette équation, rendons-nous qualitativement compte de l'influence de la décentration des hélices.

Quand la poussée des hélices ne passe pas par le centre de gravité de l'appareil, le couple central possède un terme supplémentaire en v , c'est-à-dire que l'action du couple central intervient non seulement lors de la variation de l'angle d'attaque de l'appareil, mais aussi lors de la variation de sa vitesse.

Remplaçons dans la formule (60) h par son expression (62) (page 103), et par cela mettons en évidence le moment M de la poussée des hélices. Nous obtenons :

$$(116) \quad \Gamma = -\frac{2M}{V_0} v - \left(c + \frac{M}{V_0^2 i_0} \right) V_0^2 j = -\frac{2M}{V_0} v - \frac{M}{i_0} j - c V_0^2 j$$

avec

$$M = -\frac{h V_0}{2}.$$

Quand la poussée des hélices est disposée au-dessous du centre de gravité de l'appareil, M est positif (*voir* § 30, p. 71). On voit d'après la formule (116) que dans ce cas la fraction du couple central proportionnelle à la variation j de l'angle d'attaque est accrue de $-\frac{M}{i_0} j$, couple qui est de signe contraire à j et par conséquent stabilisateur. La fraction du couple central proportionnelle à v est pour $M > 0$, de signe contraire à v , c'est-à-dire que cette fraction du couple central tend à cabrer l'appareil quand sa vitesse V décroît et inversement tend à incliner l'appareil quand V croît. Une telle action est-elle favorable à la stabilité de l'aéroplane? Il est aisé de voir que non. Et, en effet, si l'on s'en rapporte à l'hyperbole de Penaud, page 60, on voit que la vitesse de l'appareil croît naturellement quand son angle d'attaque diminue et décroît quand son

angle d'attaque augmente. Un accroissement de la vitesse de l'appareil est donc le résultat d'une diminution de l'angle d'attaque. Pour compenser cet effet, c'est donc un couple cabreur qui est nécessaire et non pas un couple inclineur, comme le donne l'expression $\frac{2M}{V_0} v$ pour $M > 0$. Un tel couple ne fait qu'accentuer encore plus la diminution de l'angle d'attaque et par cela même l'accroissement de la vitesse de l'appareil. On verrait de même pour le cas de v négatif que le couple $-\frac{2M}{V_0} v$ pour $M > 0$ reste toujours déstabilisateur. En définitive, pour $M > 0$, c'est-à-dire quand l'axe des hélices est disposé sous le centre de gravité de l'appareil, la décentration des hélices produit un *couple stabilisateur* proportionnel à la variation de l'angle d'attaque qui est de la forme

$$-\frac{M}{V_0^2 l_0} V_0^2 j$$

et un *couple déstabilisateur* proportionnel à la variation de la vitesse de l'appareil qui a pour expression

$$-\frac{2M}{V_0} v.$$

Un appareil dont les hélices sont disposées au-dessous du centre de gravité est donc équivalent à un appareil possédant un certain couple de rappel stabilisateur, dû à des empennages horizontaux par exemple, et qui en outre est sollicité, quand il est dérangé de son régime, par une action déstabilisatrice proportionnelle à la variation de la vitesse de l'appareil. Il est évident qu'un tel appareil est bien inférieur à l'appareil dont les hélices ne sont pas décentrées, et il est donc inutile de s'y arrêter davantage.

Quand les hélices sont disposées *au-dessus* du centre de gravité de l'appareil, c'est-à-dire quand $M < 0$, la fraction du couple central proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque et qui a pour expression

$$-\frac{M}{l_0} j$$

sera de même signe que j et par conséquent déstabilisatrice, mais par contre la fraction du couple central proportionnelle à v devient

stabilisatrice. Ce dernier couple étant de la forme

$$-\frac{2M}{V_0}v,$$

il sera pour $M < 0$ de même signe que v . Quand la vitesse V de l'appareil subira un accroissement, ce sera le signe d'une diminution de l'angle d'attaque i et ce couple sera cabreur et par conséquent stabilisateur. Il en est de même quand V décroît. Comme l'action déstabilisatrice proportionnelle à j et due à la décentration des hélices peut être compensée par des empennages horizontaux par exemple. Il suffit pour cela que

$$\left(c + \frac{M}{V_0^2 i_0}\right) > 0.$$

On peut considérer que les hélices disposées *au-dessus* du centre de gravité de l'appareil introduisent une action stabilisatrice proportionnelle à la variation de la vitesse de l'aéroplane.

Les empennages horizontaux donnent, quand ils sont convenablement disposés, ainsi qu'il a été précédemment établi, une action stabilisatrice proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque de l'appareil, et nous avons vu qu'une telle action était insuffisante pour assurer la stabilité complète de l'aéroplane. Il est donc du plus grand intérêt d'envisager l'influence d'une action stabilisatrice proportionnelle à la variation de la vitesse de l'aéroplane, action qui peut être obtenue par la décentration des hélices de ce dernier. Pour nous rendre compte de cette action stabilisatrice, il nous suffit de discuter l'équation (115) en considérant M comme négatif, c'est-à-dire h et avec lui H comme positif.

63. Pour mieux mettre en relief toute l'influence de l'action stabilisatrice qui peut être produite par la décentration des hélices, nous supposerons d'abord que le couple de rappel produit par les empennages horizontaux, dont peut être muni l'appareil, ou bien même que le couple de rappel simplement dû à la voilure de l'appareil est suffisant pour contrebalancer l'action déstabilisatrice qui est proportionnelle à j et qui accompagne nécessairement l'effet stabilisateur proportionnel à v , produit par la décentration

des hélices. Nous considérons donc

$$\left(C - H \frac{V_0}{2i_0} \right) = 0.$$

Dans ces conditions l'équation (115) se réduit à

$$(117) \quad \mu^4 + \mu^3(A + q_1) + \mu^2(Aq_1 + q_2) + \mu(Aq_2 + Hq_1'') + Hq_2'' = 0.$$

Pour être renseigné sur l'action stabilisatrice de la décentration des hélices, il nous faut donc étudier les racines de cette équation pour toutes les valeurs positives de A et de H (A ne peut évidemment qu'être positif).

Nous allons procéder exactement comme nous l'avons fait précédemment.

Transcrivons l'équation (117) en mettant H et A en évidence. Nous obtenons

$$(118) \quad \mu + H \frac{q_1''\mu + q_2''}{\mu(\mu^2 + q_1\mu + q_2)} + A = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} y &= \mu & H &= u, \\ x &= \frac{q_1''\mu + q_2''}{\mu(\mu^2 + q_1\mu + q_2)}, & A &= v, \end{aligned}$$

x et y étant les coordonnées ponctuelles d'une courbe unicursale; u et v les coordonnées tangentielles d'une droite. Les ordonnées des points d'intersection de cette courbe avec les droites (u, v) seront les racines réelles de l'équation (117) pour les valeurs de A et de H correspondant à la droite considérée. La discussion de la courbe

$$(119) \quad x = \frac{q_1''y + q_2''}{y(y^2 + q_1y + q_2)}$$

nous renseignera donc pour les diverses valeurs de A et de H, sur les racines de l'équation (117).

On verra aisément que, de même que pour la courbe (85), cette courbe (119) est d'une *allure invariable* pour toutes les valeurs possibles et imaginables des caractéristiques d'un aéroplane, c'est-à-dire pour toutes les valeurs admissibles de q_1, q_2, q_1'', q_2'' .

Cette courbe (119) a les mêmes asymptotes que la courbe (85), et comme les coefficients q_1'' et q_2'' ont respectivement très sensible-

ment pour valeur

$$q_1'' = \frac{2Pr}{M} = \frac{2Mgr}{M} = 2gr \approx 20,$$

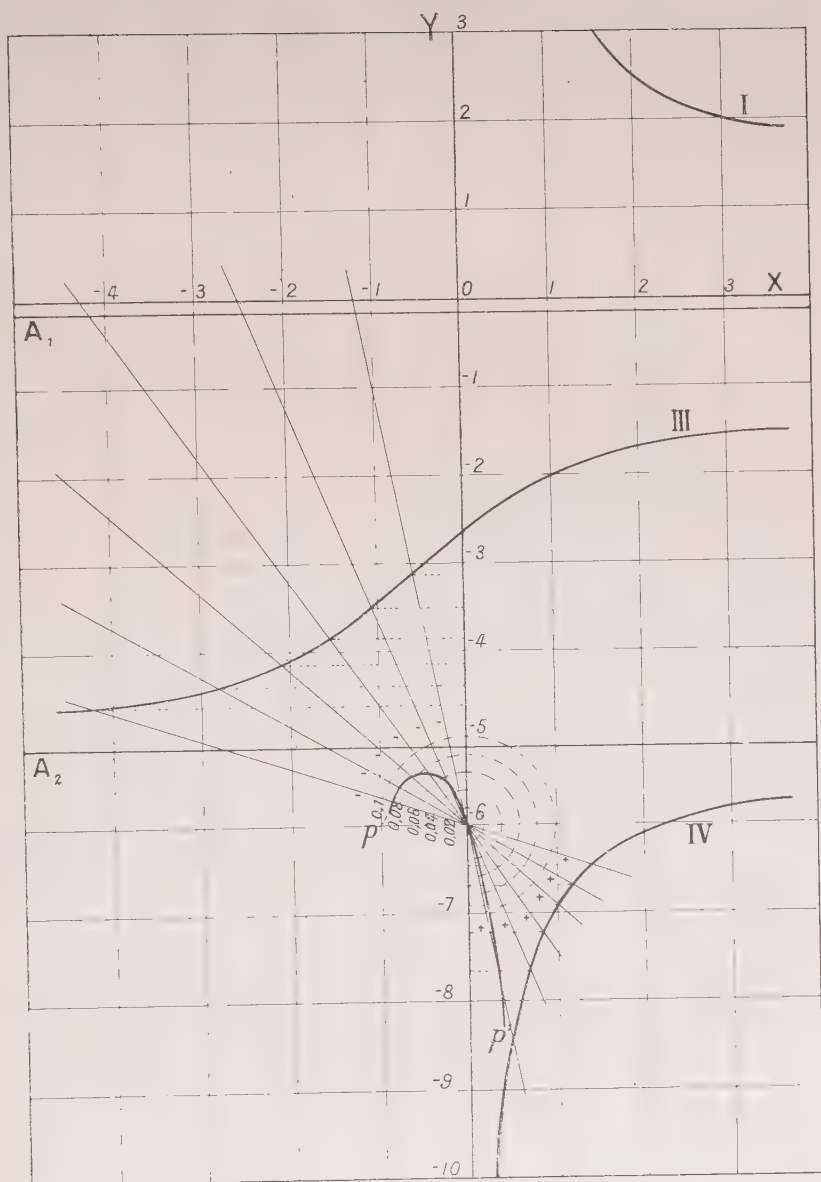
$$q_2'' = \frac{P(\lambda V_0^2 + \Phi)}{M^2 V_0} = g \frac{\lambda V_0^2 + \Phi}{M V_0} \approx 10 q_1,$$

il est fort aisé de se rendre compte de son allure générale.

Nous nous contentons de reproduire sur la figure 31, cette courbe (119) construite pour les mêmes données particulières que la figure 29, données qui sont indiquées en Note (1), page 146. Cette courbe, de même que la courbe (85), est composée de quatre branches. Elle présente ceci de particulier que sa branche comprise entre l'axe de X et l'asymptote A_1 est toujours située très loin de l'axe des Y (l'abscisse de son point le plus rapproché de cet axe s'exprime par des milliers d'unités). Cela se conçoit fort aisément. Comme q_2'' est relativement grand, pour de petites valeurs de y , l'abscisse x doit nécessairement être grande.

Il résulte de ce fait, que les droites qui pourront couper cette courbe en quatre points d'ordonnées négatives auront nécessairement leurs coefficients angulaires excessivement petits en valeur absolue, à moins que l'on admette des valeurs extrêmement grandes pour A, valeurs qui doivent être considérées comme tout à fait pratiquement irréalisables et incompatibles avec les proportions ordinaires d'un aéroplane. C'est donc des valeurs excessivement petites de H qui correspondent à ces droites, valeurs que la moindre décentration des hélices fera dépasser à H en toute probabilité. Comme d'un autre côté, à la simple inspection de la figure 31 on voit que toute droite qui ne coupe pas la branche I (cette solution correspond à des racines positives de l'équation caractéristique et doit par conséquent être rejetée) coupe nécessairement les branches III et IV, nous sommes amenés à conclure que l'aéroplane stabilisé par la décentration des hélices sera nécessairement un appareil semi-périodique, c'est-à-dire que son équation caractéristique aura toujours deux racines réelles et deux racines complexes. Rendons-nous compte de la valeur absolue des parties réelles des deux racines complexes qui sont évidemment conjuguées. Il nous suffit pour cela d'envisager pour une valeur déterminée de A, un faisceau de droites, passant par le point de coordonnées (0, — A)

Fig. 31.



et d'envisager les points d'intersection de ces droites avec les branches III et IV.

[Sur la figure 31 on a supposé $A = 6$ et l'on a tracé un faisceau de droites passant par le point $(0, -6)$]. Les ordonnées de ces points d'intersection sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique (117) pour diverses valeurs de H . Comme le coefficient de μ^3 , changé de signe, est égal à la somme des racines de cette équation, en retranchant de $A + \mu_1$, changé de signe, la somme des deux racines réelles, nous obtiendrons le double de la partie réelle des racines complexes. Cette opération peut se faire graphiquement fort rapidement. C'est ainsi que sur la figure 31 on a tracé le diagramme polaire pp' en portant respectivement sur chaque droite passant par le point $(0, -A)$ la valeur correspondante de la partie réelle des racines complexes. (Vu la petitesse de ces valeurs on a adopté pour les représenter une échelle dix fois plus grande que pour les autres parties de la figure). Les points de ce diagramme situés à droite de l'axe des Y correspondent à des valeurs positives des parties réelles, les points situés à gauche correspondent à des valeurs négatives des parties réelles. La courbe pp' montre que quand les parties réelles des racines complexes sont négatives elles sont toujours très petites en valeur absolue. Comme l'allure générale des branches III et IV est tout à fait indépendante de toutes les valeurs possibles et imaginables des caractéristiques d'un aéroplane, comme d'un autre côté l'on verra aisément, sans que nous y insistions davantage, que l'allure générale du diagramme pp' est indépendante de la valeur de A , on est en définitive amené aux conclusions suivantes en ce qui concerne l'action stabilisatrice de la décentration des hélices :

66. Dans le cas favorable où l'action déstabilisatrice des hélices proportionnelles à la variation de l'angle d'attaque est compensée, l'action stabilisatrice proportionnelle à la variation de la vitesse ne permet de réaliser qu'un *appareil semi-périodique*. Comme les parties réelles des racines complexes quand elles sont négatives, sont nécessairement petites en valeur absolue, l'aéroplane stabilisé par la décentration des hélices ne sera pas supérieur au point de vue de la stabilité à l'appareil stabilisé par des empennages horizontaux; il aura toujours de même que ce dernier un temps d'amor-

tissement relativement grand. Comme on la conçoit aisément, l'action stabilisatrice de la décentration des hélices disparaît aussitôt que le moteur est arrêté. Elle dépend donc essentiellement du fonctionnement du moteur et ne peut, par conséquent, être considérée comme une action stabilisatrice aussi sûre que celle produite par les empennages horizontaux. Comme de plus, la réalisation de l'appareil apériodique est impossible, dans le cas de la stabilisation par décentration des hélices, la stabilisation par des empennages horizontaux est un procédé de stabilisation beaucoup plus sûr et bien supérieur au procédé de stabilisation par décentration des hélices.

Nous ne nous arrêterons pas sur l'étude des propriétés de stabilité d'un aéroplane possédant tant une action stabilisatrice proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque, qu'une action stabilisatrice proportionnelle à la variation de la vitesse et dont l'équation complète (115) est l'équation caractéristique, car la discussion de ce cas ne conduit à aucun résultat nouveau. Pour certaines valeurs du couple stabilisateur proportionnel à la variation de l'angle d'attaque, la réalisation d'appareils apériodiques devient possible, mais l'aéroplane reste toujours un appareil présentant un temps d'amortissement relativement grand.

Un exemple de stabilisation de l'aéroplane par la décentration des hélices nous est offert par l'appareil Wright. On est généralement porté à croire, que cet appareil étant dénué d'empennages horizontaux, ne possède pas d'action stabilisatrice automatique. En réalité il n'en est nullement ainsi. Il est bien connu qu'une des caractéristiques de l'appareil Wright est la disposition des axes de ses hélices bien au-dessus du centre de gravité de l'appareil. Comme il résulte de la discussion qui précède, c'est cette décentration des hélices qui produit l'action stabilisatrice automatique, mais qui seulement, dans ce cas est fonction de la variation de la vitesse de l'appareil. L'appareil Wright nous fournit même une confirmation d'un des principaux résultats de cette discussion. Quiconque a jamais vu voler un appareil Wright, a certainement remarqué que contrairement aux autres appareils, le vol de cet appareil est toujours accompagné d'une certaine ondulation assez marquée de sa trajectoire et d'une oscillation de l'appareil, quoique faible mais presque continue. Cette apparence n'est autre chose

que la caractéristique de l'appareil semi-périodique, que notre discussion nous a relevée, appareil dont les déviations du régime ne peuvent s'amortir qu'après une série d'oscillations. On a généralement attribué l'allure oscillante du vol de l'appareil Wright à la manœuvre presque continue du gouvernail horizontal à laquelle on est obligé de recourir dans ces appareils. On est conduit à cette conclusion quand on considère l'appareil Wright comme essentiellement instable, car alors on ne peut concevoir la possibilité du vol de l'appareil, qu'en lui imprimant à l'aide du gouvernail horizontal une sorte d'oscillation rythmique autour de son régime. Mais comme il résulte de notre discussion, l'appareil Wright possède une action stabilisatrice, seulement l'appareil est semi-périodique et par conséquent quoique la manœuvre du gouvernail horizontal peut faire osciller l'appareil, l'allure oscillante du vol de l'appareil Wright doit être considérée comme une propriété innée et inséparable de l'appareil. Du reste les appareils à queue ne présentent jamais ce caractère oscillant de l'amortissement de leurs déviations à partir de leur régime, même quand on aperçoit le pilote manœuvrant son gouvernail horizontal. Et effectivement nous avons vu que la réalisation d'appareils apériodiques à l'aide d'empennages horizontaux était chose fort aisée. C'est probablement cette allure oscillante de l'amortissement des déviations de l'appareil Wright à partir de son régime qui doit engager le pilote à manœuvrer le gouvernail horizontal plus souvent qu'il ne le faudrait et par cela même exiger pour le maniement de ces appareils une habileté toute spéciale.

Je me permets de croire, on voudra bien en convenir, que dans l'état actuel du développement de l'aviation il est difficile d'exiger une meilleure confirmation des principaux résultats acquis par cette étude avec ce que l'expérience nous a relevé jusqu'ici des propriétés de l'aéroplane. C'est d'une manière tout à fait consciente que nous pouvons envisager maintenant toute une série de propriétés et de particularités de l'aéroplane, que jusqu'ici l'expérience nous avait seulement fait pressentir ou entrevoir. La question de la stabilité de l'aéroplane se présente à nous sous un jour nouveau, et les voies dans lesquelles sa solution pratique doit être cherchée nous sont nettement indiquées.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES PETITS MOUVEMENTS DE L'AÉROPLANE.

Nous allons maintenant établir les équations générales des petits mouvements de l'aéroplane en considérant un écart quelconque de ce dernier à partir de son régime.

Les restrictions que nous imposons au problème et les conditions dans lesquelles nous nous plaçons ont été indiquées au début du Chapitre I (deuxième Partie).

I. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES PETITS MOUVEMENTS DE L'AÉROPLANE AUTOUR DE SON RÉGIME HORIZONTAL RECTILIGNE.

67. Nous envisagerons uniquement le cas où la poussée Φ des hélices passe par le centre de gravité G de tout l'appareil.

Soit $GXYZ$ un système d'axes rectangulaires ayant le centre de gravité G pour origine et parallèle à un système d'axes fixes dont le plan des XZ est supposé horizontal (voir *fig.* 32). Pour l'orientation de régime de l'aéroplane les axes $GX_1Y_1Z_1$, invariablement liés à l'appareil, que nous avons définis au paragraphe relatif aux quilles, sont supposés coïncider avec le système $GXYZ$.

Nous définissons l'orientation de l'appareil écarté de son régime par les angles suivants (voir *fig.* 32).

φ = angle de tangage de l'appareil,

c'est l'angle de la poussée Φ des hélices, supposée passer par G avec le plan des XZ (quand Φ est supposée ne pas passer par G , φ est l'angle de la parallèle à Φ menée par G avec ce même plan des XZ)

ψ = angle de gyration de l'appareil,

c'est l'angle de la projection de Φ (ou de la parallèle à Φ par G)

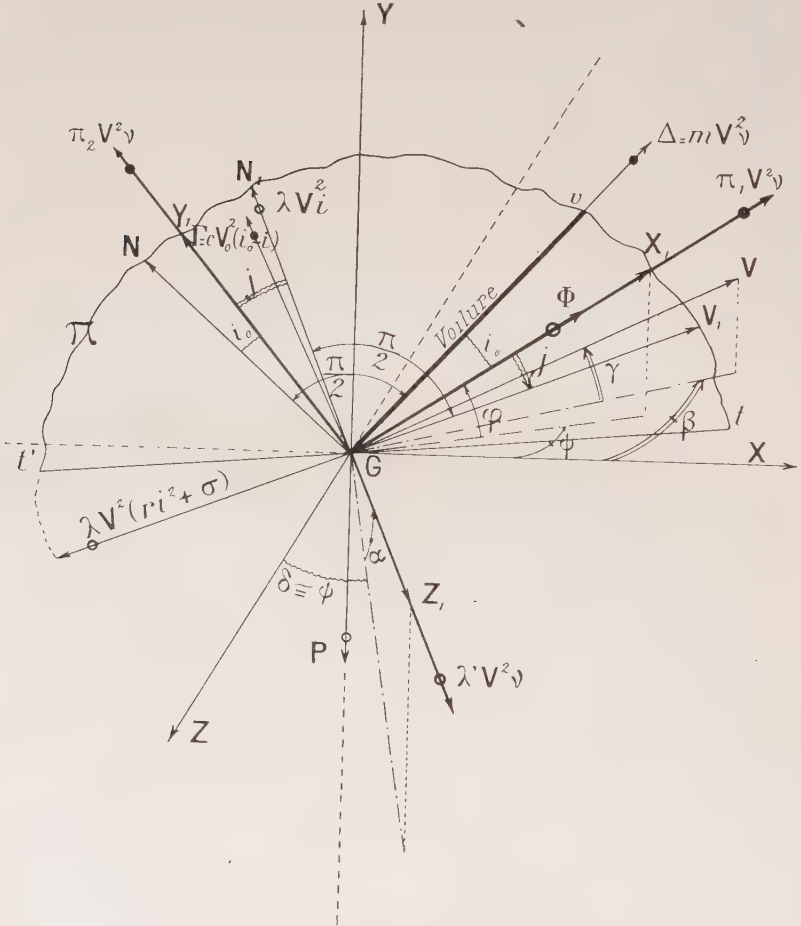
sur le plan des XZ avec l'axe des X .

α = angle de roulis de l'appareil.

C'est l'angle de l'axe Z_1 avec le plan des XZ .

Ces trois angles déterminent complètement l'orientation déviée de l'appareil.

Fig. 32.



La direction de la vitesse $\bar{V}$ de l'appareil sera définie par les angles :

γ qui est l'angle de $\bar{V}$ avec le plan des XZ ,

β qui est l'angle de la projection de $\overline{V}$ sur le plan des XZ avec l'axe des X .

Tous les angles énumérés sont représentés sur la figure 32 dans la supposition de valeurs positives. Sur cette figure π est le plan de symétrie de tout l'appareil, tt' sa trace dans le plan des XZ ; Gv est la parallèle menée par G à la ligne d'intersection du plan fictif équivalent à la voilure de l'appareil avec son plan de symétrie; GN est la normale par G au plan fictif équivalent de la voilure de l'appareil; V_1 la projection de la vitesse $\overline{V}$ sur le plan de symétrie de l'appareil, N_1 la normale à V_1 tracée dans le plan de symétrie de l'appareil.

Nous désignons par i l'angle d'attaque de l'appareil et par i_0 sa valeur pour le régime normal; on voit aisément que i_0 est l'angle de Gv et de Φ , puisque la poussée des hélices est censée être parallèle à la vitesse $\overline{V}_0$ du régime normal. Enfin nous représentons par ν l'angle de $\overline{V}$ et du plan de symétrie de l'appareil.

68. Suivant ce que nous avons vu dans la première Partie de cette étude les faces agissantes sur l'appareil sont :

Le poids P de tout l'appareil dirigé suivant $-Y$;

La poussée Φ des hélices dirigée suivant X_1 ;

La résistance de l'air de tout l'appareil dont nous considérons les deux composantes (*voir* §§ 20 et 21);

La poussée égale à $\lambda V^2 i$ et dirigée suivant N_1 ;

La traînée égale à $\lambda V^2 (ri^2 + \sigma)$ et dirigée suivant $-V_1$.

Enfin la résistance de l'air supplémentaire due aux quilles de l'appareil, qui a pour valeur (*voir* p. 113 et 114)

$$p_1 V^2 \nu + p_2 V^2 \nu = \lambda' V^2 \nu,$$

en posant $p_1 + p_2 = \lambda'$ et qui est dirigée suivant Z_1 .

Nous avons en outre à envisager les couples suivants :

Le couple central qui pour le cas où Φ passe par G a pour expression (*voir* formule 63, § 41)

$$\Gamma = c V_0^2 (i_0 - i),$$

et dont l'axe est dirigé suivant $-Z_1$ (pour le cas où c est positif, c'est-à-dire Γ stabilisateur.)

Le couple de renversement latéral dû à la déviation de la vitesse hors du plan de symétrie de l'appareil et qui a pour expression [voir formule (12), p. 43]

$$\Delta = m V^2 \gamma,$$

et dont l'axe est dirigé suivant $G\varphi$.

Les couples de déviation dus aux quilles qui ont pour expression :

$\pi_1 V^2 \gamma$ dirigé suivant X_1 (fourni par les quilles I voir *fig.* 24),

$\pi_2 V^2 \gamma$ dirigé suivant Y_1 (fourni par les quilles II, *fig.* 24).

Enfin nous avons encore à considérer les couples d'amortissement.

Désignons par $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ les composantes de la vitesse angulaire instantanée de rotation de l'appareil suivant les axes X_1, Y_1, Z_1 . Quand l'appareil possédera une vitesse angulaire ω_z autour de l'axe Z_1 , la voilure de l'appareil et surtout ses empennages horizontaux produiront un couple d'amortissement qui, suivant ce que nous avons vu, au paragraphe 13 et Chapitre IV, première Partie, peut être considéré de la forme

$$(120 c) \quad \alpha_z V \omega_z,$$

où α_z est une constante caractéristique de l'amortissement des oscillations longitudinales de l'appareil. L'axe de ce couple est évidemment dirigé suivant l'axe des Z . De même quand l'appareil possédera une vitesse angulaire ω_x , c'est encore la voilure principale, mais cette fois avec les quilles, qui interviendront pour produire un couple d'amortissement de la forme

$$(120 a) \quad \alpha_x V \omega_x,$$

où α_x est la constante d'amortissement des oscillations latérales de l'appareil. Enfin quand l'appareil possédera en outre une vitesse angulaire ω_y , interviendra un couple d'amortissement

$$(120 b) \quad \alpha_y V \omega_y,$$

des oscillations giratoires de l'appareil, dû presque uniquement à l'action des quilles de l'appareil.

Nous avons ainsi toutes les données nécessaires pour écrire les équations du mouvement de l'aéroplane en tenant compte dans

une première approximation de toutes les particularités du problème (1).

69. Désignons par V_x, V_y, V_z les projections de la vitesse du centre de gravité de l'appareil sur les axes X, Y, Z . Représentons par M la masse de tout l'appareil et par I_x, I_y, I_z ses moments d'inertie par rapport aux axes X, Y, Z . Comme le plan des XY est plan de symétrie de l'appareil, I_z sera nécessairement un moment principal d'inertie dans l'ellipsoïde central d'inertie de l'appareil, et si l'on embrasse d'un coup d'œil l'ensemble de la distribution des masses d'un aéroplane, tels qu'on les construit le plus généralement, on verra que très sensiblement les axes X et Y sont aussi des axes principaux d'inertie. Nous admettrons par conséquent qu'effectivement l'appareil est construit de telle manière que I_x et I_y sont aussi des moments principaux d'inertie.

Ceci posé, le théorème du mouvement du centre de gravité nous donne (voir *fig. 32*) :

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad M \frac{dV_x}{dt} = \Phi \cos(X_1 X) + \lambda V^2 i \cos(N_1 X) \\ \quad \quad \quad - \lambda V^2 (ri^2 + \sigma) \cos(V_1 X) + \lambda' V^2 v \cos(Z_1 X), \\ (b) \quad M \frac{dV_y}{dt} = \Phi \cos(X, Y) + \lambda V^2 i \cos(N_1 Y) \\ \quad \quad \quad - \lambda V^2 (ri^2 + \sigma) \cos(V_1 Y) + \lambda' V^2 v \cos(Z_1 Y) - P, \\ (c) \quad M \frac{dV_z}{dt} = \Phi \cos(X_1 Z) + \lambda V^2 i \cos(N_1 Z) \\ \quad \quad \quad - \lambda V^2 (ri^2 + \sigma) \cos(V_1 Z) + \lambda' V^2 v \cos(Z_1 Z) \end{array} \right.$$

et les équations d'Euler appliquées au mouvement de notre appareil autour de son centre de gravité nous donnent :

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = m V^2 v \cos(Gv, X_1) + \pi_1 V^2 v - a_x V \omega_x, \\ (b) \quad I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = m V^2 v \cos(Gv, Y_1) + \pi_2 V^2 v - a_y V \omega_y, \\ (c) \quad I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = -c V_0^2 (i_0 - i) - a_z V \omega_z. \end{array} \right.$$

(1) Le premier essai d'établissement des équations générales du mouvement de l'aéroplane est dû à F. Ferber, voir son ouvrage, *L'aviation, ses débuts, son développement*, Paris. 1908, p. 177. Dans son système d'équations Ferber a négligé les couples d'amortissement.

70. Pour rendre ces formules explicites nous avons à calculer les divers cosinus et angles qui y figurent en fonction de $\varphi, \psi, \gamma, \beta, \alpha$ que nous considérons être de petits angles, c'est-à-dire tels que leurs cosinus peuvent dans une première approximation être pris égaux à l'unité, leurs sinus égaux aux angles eux-mêmes et leurs produits et carrés peuvent être négligés. Nous avons aussi à déterminer les quantités $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Calculons d'abord les cosinus des angles que forment mutuellement les axes des deux trièdres XYZ et $X_1 Y_1 Z_1$, dont nous désignerons le déterminant par Δ_1 .

D'après la figure 32 on voit aisément que :

$$\begin{aligned}\cos(X_1 X) &= \cos \varphi \cos \psi \cong 1, \\ \cos(X_1 Y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cong \varphi, \\ \cos(X_1 Z) &= \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \cong -\psi.\end{aligned}$$

Désignons par δ l'angle de la projection de l'axe Z_1 sur le plan des XZ avec l'axe des Z . Comme on a

$$\begin{aligned}\cos(X_1 Z_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cong 0 \\ &= \cos \varphi \cos \psi \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \\ &\quad + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \cos \alpha \cos \delta,\end{aligned}$$

on trouve $\delta - \psi \cong 0$ d'un $\delta \cong \psi$
et par conséquent

$$\begin{aligned}\cos(Z_1 X) &= \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cong \psi, \\ \cos(Z_1 Y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cong \alpha, \\ \cos(Z_1 Z) &= \cos \alpha \cos \delta \cong 1.\end{aligned}$$

En remarquant que dans le déterminant Δ_1 chaque élément est égal, comme il est bien connu, à son mineur correspondant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\cos(Y_1 X) &= -[\cos(X_1 Y) \cos(Z_1 Z) - \cos(X_1 Z) \cos(Z_1 Y)] \cong -\varphi, \\ \cos(Y_1 Y) &= \cos(X_1 X) \cos(Z_1 Z) - \cos(X_1 Z) \cos(Z_1 X) \cong 1, \\ \cos(Y_1 Z) &= -[\cos(X_1 X) \cos(Z_1 Y) - \cos(X_1 Y) \cos(Z_1 X)] \cong -\alpha.\end{aligned}$$

Le Tableau ci-après donne les cosinus déterminés.

(T₁)

	X	Y	Z
X ₁	1	φ	— ψ
Y ₁	— φ	1	— α
Z ₁	ψ	α	1

Calculons ensuite l'angle d'attaque i de l'appareil et l'angle d'attaque ν de ses quilles.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \cos(NX_1) &\cong -i_0 = \cos(X_1X) \cos(NX) \\
 &\quad + \cos(X_1Y) \cos(NY) + \cos(X_1Z) \cos(NZ), \\
 \cos(NY_1) &\cong 1 = \cos(Y_1X) \cos(NX) \\
 &\quad + \cos(Y_1Y) \cos(NY) + \cos(Y_1Z) \cos(NZ), \\
 \cos(NZ_1) &\cong 0 = \cos(Z_1X) \cos(NX) \\
 &\quad + \cos(Z_1Y) \cos(NY) + \cos(Z_1Z) \cos(NZ),
 \end{aligned}$$

en substituant dans ces équations les valeurs des cosinus précédemment trouvés, en remarquant que le déterminant Δ_1 a pour valeur l'unité et en résolvant par rapport à $\cos(NX)$, $\cos(NZ)$, $\cos(NY)$, on trouve directement

$$\begin{aligned}
 \cos(NX) &= -i_0(1 + \alpha^2) - (\varphi + \psi\alpha) \cong -(i_0 + \varphi), \\
 \cos(NY) &= i_0(-\varphi + \alpha\psi) + (1 + \psi^2) \cong 1, \\
 \cos(NZ) &= -i_0(-\varphi\alpha - \psi) - (\alpha - \varphi\psi) \cong -\alpha,
 \end{aligned}$$

d'autre part on voit aisément que

$$\begin{aligned}
 \cos(VX) &= \cos\gamma \cos\beta \cong 1, \\
 \cos(VY) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \sim \gamma, \\
 \cos(VZ) &= \cos\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cong -\beta.
 \end{aligned}$$

et en remarquant que

$$\cos(NV) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) \cong -i,$$

et que d'un autre côté

$$\begin{aligned}\cos(NV) &= \cos(NX) \cos(VX) + \cos(NY) \cos(VY) \\ &\quad + \cos(NZ) \cos(VZ) \cong -(i_0 + \varphi) + \gamma + \alpha\beta,\end{aligned}$$

et en comparant les deux relatives précédentes, on trouve pour l'angle d'attaque de l'appareil la valeur

$$(123\ a) \quad i \cong i_0 + (\varphi - \gamma),$$

ou encore en posant $(\varphi - \gamma) = j$

$$(123\ b) \quad i \cong i_0 + j,$$

Semblablement pour l'angle d'attaque des quilles, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(Z_1 V) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right) \cong -v, \\ \cos(Z_1 V) &= \cos(Z_1 X) \cos(VX) \\ &\quad + \cos(Z_1 Y) \cos(VY) + \cos(Z_1 Z) \cos(VZ) = \psi + \alpha\gamma - \beta,\end{aligned}$$

d'où l'on a aisément

$$(124) \quad v \cong \beta - \psi.$$

Calculons maintenant les cosinus directeurs de N_1 et V_1 .

On voit aisément que

$$\begin{aligned}\cos(V_1 X_1) &= \cos j \cong 1 = \cos(X_1 X) \cos(V_1 X) \\ &\quad + \cos(X_1 Y) \cos(V_1 Y) + \cos(X_1 Z) \cos(V_1 Z), \\ \cos(V_1 Y_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + j\right) \cong -j = \cos(Y_1 X) \cos(V_1 X) \\ &\quad + \cos(Y_1 Y) \cos(V_1 Y) + \cos(Y_1 Z) \cos(V_1 Z), \\ \cos(V_1 Z_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cong 0 = \cos(Z_1 X) \cos(V_1 X) \\ &\quad + \cos(Z_1 Y) \cos(V_1 Y) + \cos(Z_1 Z) \cos(V_1 Z),\end{aligned}$$

en substituant la valeur des cosinus précédemment trouvés, en remarquant que $\Delta_1 = 1$ et en résolvant par rapport à $\cos(V_1 X)$, $\cos(V_1 Y)$, $\cos(V_1 Z)$, on trouve directement

$$\begin{aligned}\cos(V_1 X) &= (1 + \alpha^2) + j(\varphi + \alpha\psi) \cong 1, \\ \cos(V_1 Y) &= (-\varphi - \alpha\psi) - j(1 - \psi^2) \cong \varphi - j = \gamma, \\ \cos(V_1 Z) &= (-\varphi\alpha - \psi) - j(\alpha - \alpha\psi) \cong -\psi.\end{aligned}$$

Tout semblablement on a

$$\begin{aligned}\cos(N_1 X_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - j\right) \cong j = \cos(X_1 X) \cos(N_1 X) \\ &\quad + \cos(X_1 Y) \cos(N_1 Y) + \cos(X_1 Z) \cos(N_1 Z), \\ \cos(N_1 Y_1) &= \cos j \cong 1 = \cos(Y_1 X) \cos(N_1 X) \\ &\quad + \cos(Y_1 Y) \cos(N_1 Y) + \cos(Y_1 Z) \cos(N_1 Z), \\ \cos(N_1 Z_1) &= \cos \frac{\pi}{2} \cong 0 = \cos(Z_1 X) \cos(N_1 X) \\ &\quad + \cos(Z_1 Y) \cos(N_1 Y) + \cos(Z_1 Z) \cos(N_1 Z),\end{aligned}$$

et en résolvant ces équations par rapport à $\cos(N_1 X)$, $\cos(N_1 Y)$, $\cos(N_1 Z)$, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(N_1 X) &= j(1 + \alpha^2) - (\varphi + \alpha\psi) \cong j - \varphi = -\gamma, \\ \cos(N_1 Y) &= -j(-\varphi + \alpha\psi) + (1 + \psi^2) \cong 1, \\ \cos(N_1 Z) &= j(-\varphi\alpha - \psi) - (\alpha - \varphi\psi) \cong -\alpha.\end{aligned}$$

On voit enfin que

$$(125) \quad \begin{aligned}\cos(G\nu, X_1) &= \cos i_0 \cong 1, \\ \cos(G\nu, Y_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_0\right) \cong i_0,\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\cos(VX) &= \cos\gamma \cos\beta \cong 1, \\ \cos(VY) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \cong \gamma, \\ \cos(VZ) &= \cos\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cong \beta.\end{aligned}$$

Le tableau ci-après donne les cosinus directeurs déterminés

(T₂)

	X	Y	Z
V ₁	1	γ	$-\beta$
N ₁	$-\gamma$	1	$-\alpha$
V	1	γ	$-\beta$

Nous avons finalement à calculer les trois vitesses angulaires ω_x , ω_y , ω_z .

A un instant déterminé, la vitesse angulaire instantanée de

rotation de notre appareil est la somme de ses trois composantes $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ qui sont respectivement dirigées suivant les trois directions : de la normale au plan de X_1 et de sa projection sur le plan des XZ (normale contenue dans le plan des XZ); de l'axe des Y ; de la normale au plan de Z_1 et de sa projection sur le plan des XZ (normale aussi contenue dans le plan des XZ). Or, comme il est aisé de le voir, ces trois directions ne s'écartent que pour de petits angles des directions des axes Z_1 , Y_1 , X_1 et par conséquent dans une première approximation nous pouvons écrire

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_z \cong \frac{d\varphi}{dt}, \\ \omega_y \cong \frac{d\psi}{dt}, \\ \omega_x \cong \frac{dz}{dt}. \end{array} \right.$$

71. Substituons maintenant dans les systèmes d'équations (121) et (122) les valeurs des cosinus donnés par les Tableaux (T_1), (T_2) et les égalités (125); la valeur des angles donnés par les relations (123) et (124); la valeur des vitesses angulaires données par les relations (126) et remplaçons la vitesse de l'appareil par $V = V_0 + v$ où v est la petite variation de V autour de sa valeur de régime V_0 . Enfin, en négligeant les produits et carrés des quantités qui sont considérées comme petites, et en remarquant suivant ce que nous avons vu page 59, que $P = \lambda V_0^2 i_0$ et $\Phi = \lambda V_0^2 (r i_0^2 + \sigma)$ nous obtenons :

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad M \frac{dv}{dt} = -P\gamma - 2Prj - \frac{2\Phi}{V_0} v, \\ (b) \quad MV_0 \frac{d\gamma}{dt} = (\lambda V_0^2 + \Phi)j + \frac{2P}{V_0} v, \\ (c) \quad -MV_0 \frac{d\beta}{dt} = -Px - \lambda V_0^2 \gamma, \\ (d) \quad I_x \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = mV_0^2 v + \pi_1 V_0^2 v - a_x V_0 \frac{d\alpha}{dt}, \\ (e) \quad I_y \frac{d^2 \psi}{dt^2} = mV_0^2 i_0 v + \pi_2 V_0^2 v - a_y V_0 \frac{d\psi}{dt}, \\ (f) \quad I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -cV_0^2 j - a_z V_0 \frac{d\varphi}{dt}, \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} j &= \varphi - \gamma, \\ v &= \beta - \psi. \end{aligned}$$

L'ensemble de ces égalités représente le système d'équations relatif aux petits mouvements de l'aéroplane autour de son orientation de régime horizontal rectiligne. Ce système présente cette particularité qu'il se divise en deux groupes d'équations indépendantes : Le groupe formé par les équations (127*a*), (127*b*), (127*f*) qui ne contiennent que les paramètres φ , γ et ψ qui définissent le tangage de l'appareil [ce groupe n'est autre chose que le système d'équations (76), précédemment établi] et le groupe des équations (127*c*), (127*d*) et 127*e*) qui ne contiennent que les paramètres β , α et φ qui caractérisent le roulis et la giration de l'appareil, ces derniers étant, comme on le voit, intimement liés. Ainsi se trouve justifiée l'étude séparée de la stabilité longitudinale de l'aéroplane et de la stabilité latérale de l'appareil.

Ce système d'équations (127) sera toujours dans une première approximation l'expression exacte du problème des petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime, car pour les raisons que nous avons déjà indiquées page 126, il est indépendant dans une première approximation des progrès futurs qui pourront être faits dans l'étude des lois de la résistance de l'air.

CHAPITRE III.

STABILITÉ LATÉRALE.

72. Considérons maintenant les trois équations (127c), (127d) et (127e) du système (127), qui se rapportent au roulis et à la giration de l'aéroplane.

Ces équations sont de la forme

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} -MV_0 \frac{d\beta}{dt} = -Px + \lambda' V_0^2 \nu, \\ I_x \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = (m + \pi_1) V_0^2 \nu - a_x V_0 \frac{dx}{dt}, \\ I_y \frac{d^2 \psi}{dt^2} = (mi_0 + \pi_2) V_0^2 \nu - a_y V_0 \frac{d\psi}{dt}, \end{array} \right.$$

avec

$$\nu = \beta - \psi.$$

A la simple inspection de ces équations, on voit que le principal effet des quilles est de renforcer l'action due à la déviation de la vitesse de l'appareil hors du plan de symétrie de ce dernier. En remplaçant dans le système (128), ν par son expression en fonction de β et ψ on obtient

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{MV_0} \alpha - \frac{d\beta}{dt} - \frac{\lambda' V_0}{M} \beta + \frac{\lambda' V_0}{M} \psi = 0, \\ \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{a_x V_0}{I_x} \frac{dx}{dt} - \frac{(m + \pi_1) V_0^2}{I_x} \beta + \frac{(m + \pi_1) V_0^2}{I_y} \psi = 0, \\ - \frac{(mi_0 + \pi_2) V_0^2}{I_y} \beta + \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{a_y V_0}{I_y} \frac{d\psi}{dt} + \frac{(mi_0 + \pi_2) V_0^2}{I_x} \psi = 0. \end{array} \right.$$

Système d'équations qui admet pour équation caractéristique

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{P}{MV_0} & - \left(\mu + \frac{\lambda' V_0}{M} \right) & \frac{\lambda' V_0}{M} \\ \mu \left(\mu + \frac{a_x V_0}{I_x} \right) & - \frac{(m + \pi_1) V_0^2}{I_x} & \frac{(m + \pi_1) V_0^2}{I_y} \\ 0 & - \frac{(mi_0 + \pi_2) V_0^2}{I_y} & \mu^2 + \frac{a_y V_0}{I_y} \mu + \frac{(mi_0 + \pi_2) V_0^2}{I_x} \end{array} \right| = 0.$$

ou bien encore

$$(130) \quad \begin{vmatrix} \frac{P}{MV_0} & -\left(\mu + \frac{\lambda' V_0}{M}\right) & -\mu \\ \mu \left(\mu + \frac{\alpha_x V_0}{I_x}\right) & -\frac{(m + \pi_1) V_0^2}{I_x} & 0 \\ 0 & -\frac{(mi_0 + \pi_2) V_0^2}{I_y} & \mu \left(\mu + \frac{\alpha_y V_0}{I_y}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

et on voit de suite que μ peut être mis en facteur devant cette équation et que par conséquent cette équation admet nécessairement une racine

$$\mu = 0.$$

Il suit de là que dans la solution générale du système (128) les expressions générales pour α , β et ψ contiendront toutes nécessairement un terme indépendant du temps et par conséquent constant. Nous sommes ainsi amenés à conclure que, quand l'aéroplane subira une déviation de roulis ou de giration, il ne reviendra pas vers son orientation primitive, mais au contraire, après une série d'oscillations possibles, il conservera nécessairement un écart permanent à partir de son régime. Ceci évidemment dans le cas où l'on considère un appareil invariable et qu'on n'effectue aucune manœuvre pour redresser l'appareil. Une discussion plus ample de l'équation caractéristique (130) sera donc sans grand intérêt, puisque, quoi que l'on fasse, il est impossible d'assurer la stabilité latérale de l'aéroplane par la constitution même de l'appareil. En définitive, en ce qui concerne la stabilité latérale de l'aéroplane, nous pouvons formuler la conclusion fondamentale suivante :

Quelle que soit la forme et la constitution d'un aéroplane, quel que soit le système de quilles dont est muni ce dernier, il est impossible de réaliser la stabilité latérale de l'appareil sans avoir recours à quelque dispositif mobile de stabilisation.

On conçoit maintenant aisément pourquoi la pratique de l'aviation a amené bien des constructeurs à supprimer petit à petit les quilles ou cloisons verticales dont étaient primitivement munis leurs appareils. La résistance supplémentaire à l'avancement introduite par ces dernières n'étant pas compensée par un effet utile

suffisant. En fait de quilles, le gouvernail vertical suffit généralement. Il tend à ramener l'appareil dans le vent et fournit un couple d'amortissement des oscillations de giration de l'appareil pratiquement suffisant. Quand un aéroplane ne possède en fait de quille que le gouvernail vertical, on peut considérer, dans le langage de nos notations, la force $\lambda' V_0 \nu$ et le couple $\pi_1 V_0^2 \nu$ comme négligeables.

Alors l'équation caractéristique du système (128) se réduit à

$$(131) \quad \begin{vmatrix} \frac{P}{MV_0} & -\mu & -\mu \\ \mu \left(\mu + \frac{\alpha_x V_0}{I_x} \right) & -\frac{m V_0^2}{I_x} & 0 \\ 0 & -\frac{(m i_0 + \pi_2) V_0^2}{I_y} & \mu \left(\mu + \frac{\alpha_y V_0}{I_y} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui ne diffère pas sensiblement de l'équation (130).

Si l'on veut étudier un dispositif automatique permettant d'assurer la stabilité latérale de l'aéroplane, il faut introduire dans le système d'équations (128) des termes supplémentaires en α , β ou ψ et voir quelles modifications ces termes introduisent dans l'équation caractéristique. Seuls les dispositifs qui nous permettront d'obtenir une équation caractéristique, dont les racines seront réelles, négatives et grandes en valeur absolue, pourront être considérées comme répondant à toutes les exigences d'une stabilité pratiquement, parfaitement assurée. En considérant le système (129), on voit entre autres que ces dispositifs devront nécessairement aussi être sensibles à la variation de ψ , c'est-à-dire à la giration de l'appareil et introduire dans la deuxième de ces équations un terme en ψ sans toutefois introduire un terme en β ayant le même coefficient. Seulement dans ces conditions, la racine nulle de l'équation (130) pourra être évitée et l'on pourra obtenir un appareil revenant effectivement vers son orientation de régime après une déviation de roulis ou de giration.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

73. Si l'on jette un coup d'œil rétrospectif sur l'ensemble des idées que nous avons développées dans cette étude, et sur l'ensemble des résultats auxquels nous sommes arrivés, les conclusions suivantes se dégagent :

Au point de vue de la stabilité latérale, l'aéroplane est un appareil essentiellement instable. Quand son équilibre latéral relatif est troublé, aucune action capable de ramener complètement l'appareil vers son orientation de régime n'intervient, et ceci quelles que soient la forme, les dimensions et la disposition générale de l'appareil, tant qu'il constitue un système invariable. La stabilité latérale de l'aéroplane ne peut être assurée que par quelque dispositif d'un caractère essentiellement mobile. Dans la pratique de l'aviation, on a recours soit à des ailerons de types différents, soit au gauchissement de la voilure de l'appareil. Le gauchissement exige que la voilure de l'appareil soit flexible, et ce fait ne doit pas être considéré comme étant sans danger pour la solidité de cette dernière. Et, en effet, l'effort subi par la voilure d'un appareil est en général susceptible de variations plus ou moins brusques, et cet effet, suffisamment répété, doit, comme il est bien connu, sensiblement fatiguer une voilure flexible par les déformations répétées qu'il lui impose, et peut même, à la longue, amener sa rupture. C'est pourquoi les ailerons sont bien préférables, puisqu'ils permettent l'emploi de voilures rigides. Quand on voudra rendre automatique la commande du dispositif chargé d'assurer la stabilité latérale, l'action de ce dernier devra, ainsi que nous l'avons précédemment montré, être fonction non seulement du roulis de l'appareil, mais aussi nécessairement fonction de sa *giration*.

74. En ce qui concerne la stabilité longitudinale automatique, sa réalisation par un aéroplane invariable est possible, rien que par la constitution même de l'appareil. Seulement, cette stabilité

ne peut pas être considérée comme pratiquement assurée, ainsi que nous l'avons montré, d'une manière complètement suffisante.

Deux procédés essentiellement différents se dégagent de notre étude et peuvent être employés pour assurer la stabilité longitudinale automatique.

L'un de ces procédés, qu'on peut appeler le *système Wright* ou *système américain*, consiste dans la décentralisation des hélices de l'appareil. Les hélices de l'aéroplane, disposées au-dessus de son centre de gravité, produisent, ainsi qu'il a été précédemment montré, un couple de rappel stabilisateur proportionnel à la variation de la vitesse de l'appareil. Cet effet stabilisateur peut rendre l'aéroplane stable, mais les appareils ainsi stabilisés sont le plus généralement *semi-périodiques*. Ce système présente, toutefois, plusieurs assez graves inconvénients. D'abord l'action stabilisatrice de ce système est toujours accompagnée d'une action déstabilisatrice proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque. Ensuite, l'action stabilisatrice de ce système n'est pas de toute sécurité, car elle est intimement liée au fonctionnement du moteur et disparaît avec l'arrêt de ce dernier.

Le second système de stabilisation, qui est tout à l'honneur des constructeurs français, consiste dans l'emploi d'empennages horizontaux. Le *système français* de stabilisation des aéroplanes à l'aide d'empennages horizontaux, qui doivent être une queue de préférence, fournit une action stabilisatrice proportionnelle à la variation de l'angle d'attaque de l'appareil. Cette action stabilisatrice présente le grand avantage de n'être accompagnée d'aucune action nuisible à la stabilité de l'appareil comme le système Wright, et de plus, son effet est très sûr, puisqu'il ne dépend que de l'invariabilité des formes de l'appareil. C'est justement pour cette raison qu'il est déraisonnable de rendre les queues des aéroplanes mobiles, c'est-à-dire de réunir en un seul organe la queue et le gouvernail de profondeur. Car l'action stabilisatrice de la queue étant essentiellement fonction de son inclinaison par rapport à la voilure principale, elle sera dans ce cas soumise à de très grandes fluxations, et pourra disparaître et même devenir nuisible pour certaines inclinaisons de la queue. Le système français permet aisément, en outre, la réalisation de *l'aéroplane aperiodique*, ce qui n'est pas un avantage négligeable. Le système français de sta-

bilisation automatique présente donc de nombreux avantages très marqués sur le système Wright, et doit lui être préféré à tous les points de vue.

L'aéroplane stabilisé par un de ces deux procédés ne peut toutefois être considéré comme effectivement stable qu'en air calme ou par vent régulier lentement variable. Les deux systèmes précités sont impuissants à assurer la stabilité de l'aéroplane avec toutes les garanties d'une stabilité pratiquement parfaite dans tous les cas, car ces systèmes ne permettent d'obtenir, ainsi que nous l'avons montré, que des appareils possédant des temps d'amortissement relativement grands. C'est pourquoi, pour rendre l'aéroplane parfaitement stable, il est nécessaire de recourir, en outre, à quelques dispositifs stabilisateurs qui doivent être d'un caractère essentiellement mobile.

75. Quand on envisage les résultats auxquels nous a amené l'étude des deux systèmes de stabilisation automatique, tout naturellement se pose la question ? à quoi peut-être dû ce fait, de prime abord inattendu et inexplicable, que l'action de ces dispositifs ne peut pas être rendue aussi puissante et efficace que cela serait désirable ? Les actions stabilisatrices des deux systèmes français et Wright sont, comme nous l'avons vu, respectivement proportionnelles aux variations de la vitesse et de l'angle d'attaque de l'appareil. Or, ces facteurs ne dépendent pas uniquement de l'inclinaison de l'appareil sur l'horizon qui est pourtant l'élément dont l'invariabilité est le plus nécessaire pour assurer la sécurité des passagers de l'aéroplane. L'inclinaison de l'aéroplane sur l'horizon, c'est-à-dire φ dans le langage de nos notations, peut varier sans que cela entraîne simultanément la variation soit de v , soit de j . Dans de tels cas, les deux dispositifs n'entreront en action que quand la variation de φ aura entraîné une variation de la vitesse ou de l'angle d'attaque de l'appareil. Ces deux dispositifs peuvent donc, dans certaines conditions, n'avoir une action ni directe, ni instantanée, mais pour ainsi dire secondaire, et ceci peut expliquer leur efficacité relative.

Les actions stabilisatrices proportionnelles à v et à j étant impuissantes à assurer la stabilité parfaite de l'aéroplane, il est à prévoir qu'une action stabilisatrice proportionnelle à φ , le seul

paramètre, dont l'action stabilisatrice directe n'intervient ni dans le système français, ni dans le système Wright, pourrait répondre à tous les *desiderata*. Et, effectivement, on peut considérer que la pratique de l'aviation nous a confirmé ce fait. Le pilote, en effet, n'est guidé dans la manœuvre du gouvernail de profondeur faisant office de stabilisateur, que par les écarts de l'appareil à partir de la verticale, puisque c'est le seul facteur auquel le sens de l'équilibre du pilote est sensible.

Cette étude nous a donc permis de dégager quels sont les moyens qui sont impuissants d'assurer la stabilité pratiquement parfaite de l'aéroplane, et dans quelles voies doivent être cherchés les procédés de stabilisation automatique de ce dernier. On voit aussi que le problème de la stabilité de l'aéroplane est beaucoup plus complexe que celui de la stabilité des véhicules roulants et des navires, dont la stabilité peut être assurée rien que par leurs formes extérieures et leur constitution générale. La stabilité de l'aéroplane ne peut, au contraire, être assurée que par quelque dispositif *mobile*, et c'est pourquoi la solution pratique de ce problème sera nécessairement fort délicate à réaliser.

Georges DE BOTHEZAT.

Paris, janvier 1911.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 avril 1911.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 8 avril 1911.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

Pour le Vice-Rector,
L'INSPECTEUR DE L'ACADÉMIE.

J. LAMIRAUD.



SECONDE THÈSE.

RECHERCHES SUR LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ

DANS SES

RAPPORTS AVEC LA MÉCANIQUE.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 avril 1911.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 8 avril 1911.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Pour le Vice-Recteur,

L'INSPECTEUR DE L'ACADÉMIE,

J. LAMIRAUD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
47338 Quai des Grands-Augustins, 55.
